Série 7

Cette série suit les chapitres 2 et 3 du livre *Algèbre Linéaire et applications* de D. Lay.

Mots-clés : *déterminant, espace vectoriel, sous-espace vectoriel*

Remarques :

1. il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre ces exercices. Des fois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours ;
2. il peut arriver que certaines questions soient reliées au cours du jeudi.

Exercice 1 (Preuve)

Montrer :

a) Si A est une matrice inversible, alors $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$.

b) Si A et Q sont des matrices inversibles de taille $n \times n$, alors $\det\left(QAQ^{-1}\right) = \det A$.

c) Si U est une matrice carrée de taille $n \times n$ telle que $U^T U = I_n$, alors $\det U = \pm 1$.

d) Si A est une matrice carrée telle que $\det A^3 = 0$, alors A est non inversible.

Exercice 2 (Déterminant de Vandermonde)

On considère des nombres $a, b, c \in \mathbb{R}$ et on construit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$$

Montrer que $\det A = (b-a)(c-a)(c-b)$. Pour quelles valeurs de a, b, c la matrice A est-elle inversible ?

Indication. Effectuer des opérations sur les lignes de la matrice en utilisant L_2 pour modifier L_3, puis L_1 pour modifier L_2. La même astuce sera utile dans la suite de l'exercice !

Trouver une formule pour le déterminant de la matrice de la matrice 4×4

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{pmatrix}$$

Comment peut-on généraliser ce résultat aux matrices $n \times n$?

Exercice 3 (Déterminant et opérations élémentaires)

Sachant que
$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 7,$$
calculer les déterminants
$$t = \begin{vmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}, \quad s = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d+a & 2e+b & 2f+c \\ g & h & i \end{vmatrix}.$$

Exercice 4 (Déterminant)

Calculer le déterminant de la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 5 (Preuve)

Soit A une matrice $n \times n$. Montrer que si deux lignes de A sont identiques, alors $\det(A) = 0$. Que peut-on dire si deux colonnes sont identiques ?

Exercice 6 (Déterminants)

Calculer les déterminants suivants en utilisant le développement selon une ligne ou une colonne, et la méthode de Gauss d'échelonnage :
$$a = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 6 & 5 & 2 \\ 9 & 7 & 3 \end{vmatrix}, \quad b = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 2 & -5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 1 & 8 \end{vmatrix}, \quad c = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & -8 & -4 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix},$$
$$d = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ -1 & 2 & 8 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}, \quad e = \begin{vmatrix} -3 & -2 & 1 & -4 \\ 1 & 3 & 0 & -3 \\ -3 & 4 & -2 & 8 \\ 3 & -4 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

Exercice 7 (Calcul d'aire et volume)

a) Calculer le volume du parallélépipède dont un sommet se trouve à l'origine et les trois sommets adjacents se trouvent en $(1,4,0)$, $(-2,-5,2)$ et $(-1,2,-1)$.

b) Calculer l'aire du parallélogramme S dont les sommets sont donnés par les points $(-3,-1)$, $(-2,-3)$, $(0,2)$ et $(1,0)$.

Exercice 8 (Applications linéaires)

Déterminer si les applications linéaires associées aux matrices suivantes sont injectives, surjectives ou bijectives :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 0 & 9 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 8 \\ 3 & 1 & 4 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9 (Solution générale)

Écrire les solutions des systèmes $A\vec{x} = \vec{b}$ suivants sous la forme $\vec{x} = \vec{p} + \vec{v}$, où $\vec{p}$ est une solution particulière du système, et $\vec{v}$ est la solution générale du système homogène $A\vec{x} = \vec{0}$.

a) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 8 \\ x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 14 \\ 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 19 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$

Exercice 10 (Espace vectoriel)

a) Montrer que l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n, $a_0+a_1t+...+a_nt^n$, où $a_0, ..., a_n \in \mathbb{R}$ est un espace vectoriel.

b) Montrer que l'ensemble des polynômes à coefficients réels est un espace vectoriel.

c) Montrer que l'ensemble des polynômes de degré 2

$$\{a_0 + a_1t + a_2t^2 \ : \ a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}, \ a_2 \neq 0\},$$

n'est pas un espace vectoriel.

d) Montrer que l'ensemble des suites $(..., y_{-3}, y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_1, y_2, ...)$ avec $y_k \in \mathbb{R}$ muni de l'addition et la multiplication par un scalaire (comme définies en cours) est un espace vectoriel.

e) Montrer que l'espace vectoriel défini en a) et b) est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ muni de l'addition et la multiplication par un scalaire (comme définies en cours).

f) Montrer que $C(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel (muni de l'addition et la multiplication par un scalaire, comme définies en cours).

g) Montrer que $C^1(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f \text{ est dérivable de dérivée continue}\}$ est un sous-espace vectoriel de $C(\mathbb{R})$ (muni de l'addition et la multiplication par un scalaire, comme définies en cours).

Exercice 11 (Sous-espaces vectoriels)

Soit $\mathbb{P}_2$ l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 2. Parmi les quatre sous-ensembles de $\mathbb{P}_2$ ci-dessous, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{P}_2$

$$\begin{aligned}
E_1 &= \{p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}, a_0 = a_2^2\} \\
E_2 &= \{p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}, p(0) = 1\} \\
E_3 &= \{p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}, p'(t) = 0\} \\
E_4 &= \{p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}, a_0 = a_1 = a_2\}
\end{aligned}$$

Exercice 12 (V/F)

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

	V	F
a) Si B est obtenue en intervertissant deux lignes de A, alors $\det B = \det A$.	☐	☐
b) Si les colonnes de A sont linéairement dépendantes, alors $\det A = 0$.	☐	☐
c) Le déterminant de A est le produit des éléments diagonaux de A.	☐	☐
d) Soit A une matrice carrée telle que $\det(A^{13}) = 0$. Alors A est inversible.	☐	☐

Exercice 13 (QCM)

Considérer les vecteurs

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -10 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} h+7 \\ 8 \\ 2h+1 \\ 25 \end{pmatrix}.$$

Le vecteur $\vec{v}_3$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ lorsque

☐ $h = 2$ ☐ $h = 4$ ☐ $h = 1$ ☐ $h = -2$

Exercice 14 (QCM)

a. Soit A et B deux matrices inversibles de taille 3×3. On forme la matrice C en multipliant la 3ème ligne de A par 5, puis la 2ème colonne de cette matrice par -3. On définit la matrice $D = C \cdot 2B$. Alors

☐ $\det D = 30 \det A \det B$;
☐ $\det D = -60 \det A \det B$;
☐ $\det D = 90 \det A \det B$;
☐ $\det D = -120 \det A \det B$.

b. Soit A et B deux matrices inversibles de taille 3×3. On obtient la matrice C à partir de A en multipliant par 4 la matrice A, puis en échangeant les lignes 1 et 2. On obtient la matrice D à partir de B en multipliant par 4 la deuxième colonne et en ajoutant 4 fois la première colonne à la troisième.

☐ $\det(C \cdot D^{-1}) = -4 \det A \cdot (\det B)^{-1}$;
☐ $\det(C \cdot D^{-1}) = -\det A \cdot (\det B)^{-1}$;
☐ $\det(C \cdot D^{-1}) = -16 \det A \cdot (\det B)^{-1}$;
☐ $\det(C \cdot D^{-1}) = -\frac{1}{4} \det A \cdot (\det B)^{-1}$.