Série 5

Cette série suit les chapitres 1 et 2 du livre *Algèbre Linéaire et applications* de D. Lay.

Mots-clés : *injective, surjective, bijective, produit matriciel*

Remarques :

1. il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre ces exercices. Des fois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours ;
2. il peut arriver que certaines questions soient reliées au cours du jeudi.

Exercice 1 (Matrice associée canoniquement)

Dire si les applications ci-dessous sont linéaires. Calculer la matrice associée canoniquement à chacune des applications qui sont linéaires et déterminer si les applications linéaires sont injectives, surjectives ou bijectives.

a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ donnée par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 \\ x_2 - x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donnée par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_2 \\ -3x_1 \end{pmatrix}$$

c) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donnée par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{x_1} \\ 5x_2 \end{pmatrix}$$

d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donnée par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

e) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donnée par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sin(x_1) \\ \cos(x_2) \end{pmatrix}$$

f) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ donnée par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_3 \\ x_1 - x_2 - x_3 \\ x_1 + x_3 + x_4 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 (Injective, surjective)

Calculer la matrice associée à l'application linéaire $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ donnée par

$$T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x + 3y + 5z + 7u \\ -x + 3y \\ x + 2y + 3z + 7u \end{pmatrix}$$

et déterminer si l'application est injective, surjective ou bijective.

Exercice 3 (Composition de transformations)

Soient $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$, et $T_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto x_1 + x_2 + x_3$.

a) Écrire les matrices canoniques associées à T_1 et T_2 et le produit matriciel associé à la composition $T_2 \circ T_1$ telle que $T_2 \circ T_1(\vec{x}) = T_2\left(T_1(\vec{x})\right)$ pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$.

b) Quel est le domaine de définition de $T_2 \circ T_1$? Quel est le domaine d'arrivée ?

Exercice 4 (Matrice associée à des transformations géométriques)

Déterminer les matrices associées aux applications linéaires suivantes et calculer ensuite l'image d'un vecteur quelconque (x, y) :

a) rotation ρ d'angle $\frac{\pi}{4}$ dans le sens positif,

b) symétrie σ par rapport à la droite $y = -x$.

Exercice 5 (Injective, surjective)

Soit $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application linéaire.

Déterminer la condition nécessaire que doivent satisfaire m et n pour que

a) T soit surjective,

b) T soit injective,

c) T soit bijective.

Exercice 6 (Solution générale)

Trouver la solution générale du système d'équations linéaires suivant

$$\begin{cases} 3x_1 + \ \ 6x_2 + \ \ 9x_3 + 5x_4 + 25x_5 = \ \ 53 \\ 7x_1 + 14x_2 + 21x_3 + 9x_4 + 53x_5 = 105 \\ -4x_1 - \ \ 8x_2 - 12x_3 + 5x_4 - 10x_5 = \ \ 11 \end{cases}$$

Exercice 7 (Applications aux équations chimiques)

Les équations en chimie traduisent les quantités de substances absorbées et produites au cours d'une réaction chimique. Lors de la combustion du méthane CH_4 par exemple, le méthane CH_4 réagit avec l'oxygène O_2 pour former du dioxyde de carbone CO_2 et de l'eau H_2O selon

$$\alpha_1 CH_4 + \alpha_2 O_2 \longrightarrow \alpha_3 CO_2 + \alpha_4 H_2O. \tag{1}$$

"Pondérer" cette équation signifie trouver des nombres entiers strictement positifs α_1, α_2, α_3, α_4 tels que le nombre total d'atomes de carbone (C), d'hydrogène (H) et d'oxygène (O) du membre de gauche et de droite soit égal (conservation de la matière).

Question : Pondérer l'équation (1).
Note : Les chimistes préfèrent les plus petits entiers $\alpha_1, \ldots, \alpha_4$ qui "réalisent" la podération.
Pour cela, considérer pour chaque molécule de la réaction le vecteur

$$\begin{pmatrix} \text{nombre d'atomes de carbone} \\ \text{nombre d'atomes d'hydrogène} \\ \text{nombre d'atomes d'oxygène} \end{pmatrix}$$

et écrire le système linéaire associé sous la forme

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} = \alpha_3 \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix},$$

puis résoudre le système.

Exercice 8 (Multiplication matricielle)

a) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Est-ce que $AB = BA$?

b) Même question pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 9 (Multiplication matricielle)

Considérons les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Calculer les produits suivants (s'ils existent). Si les produits n'existent pas, expliquer pourquoi.

a) AB, BA, AC, CA, BC, CB, CD, EC, EA

b) AA^T, A^TA, BA^T, BC^T, C^TA, BD^T, D^TB

Exercice 10 (Cas particuliers)

a) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$. Trouver (si elle existe) une matrice B de taille 2×2 non nulle telle que $AB = 0$. Indication : écrire AB sous la forme $\begin{pmatrix} A\vec{b}_1 & A\vec{b}_2 \end{pmatrix}$

b) Même question pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

c) Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & k \end{pmatrix}$. Pour quelle(s) valeur(s) de $k \in \mathbb{R}$ a-t-on $AB = BA$?

d) Trouver une matrice A non nulle telle que $A^2 = 0$.

Exercice 11 (Vrai-Faux)

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

V F

a) Si la matrice échelonnée-réduite associée à un système d'équations linéaires homogènes à m équations et n inconnues possède r pivots, alors le système a $n - r$ variables secondaires (libres). ☐ ☐

b) Si un système d'équations linéaires homogènes possède plus d'inconnues que d'équations, alors il a une infinité de solutions. ☐ ☐

c) Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^2$, alors $\vec{w}$ est une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$. ☐ ☐

d) Si le vecteur $\vec{v}_4$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ et $\vec{v}_3$, alors le vecteur $\vec{v}_1$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ et $\vec{v}_4$. ☐ ☐

Exercice 12 (QCM)

Soit R la matrice échelonnée-réduite associée à la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 & 8 \\ -1 & 2 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & -5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Nous avons

☐ $r_{14} = 6$ ☐ $r_{14} = 5$ ☐ $r_{14} = 3$ ☐ $r_{14} = 2$

Exercice 13 (Vrai-Faux)

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

V F

a) Si $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ est un ensemble linéairement indépendant de $\mathbb{R}^n$ et $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est une application linéaire, alors $\{T(\vec{v}_1), T(\vec{v}_2)\}$ est un ensemble linéairement indépendant de $\mathbb{R}^m$. ☐ ☐

b) Si $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ est un ensemble linéairement dépendant de $\mathbb{R}^n$ et $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est une application linéaire, alors $\{T(\vec{v}_1), T(\vec{v}_2)\}$ est un ensemble linéairement dépendant de $\mathbb{R}^m$. ☐ ☐

c) Soit $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application linéaire. Si les vecteurs $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ engendrent $\mathbb{R}^n$ et sont tels que $T(\vec{v}_j) = \vec{0}$ pour tout $j \in \{1, \ldots, k\}$, alors $T(\vec{v}) = \vec{0}$ pour tout $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$. ☐ ☐

d) Si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ et $T(\vec{0}) = \vec{0}$, alors T est une application linéaire. ☐ ☐

e) Si $T(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = \lambda T(\vec{u}) + \mu T(\vec{v})$ pour tout $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est une application linéaire. ☐ ☐

Exercice 14 (QCM)

a. Combien de colonnes pivots une matrice 7×5 doit-elle posséder pour que ses colonnes soient linéairement indépendantes ?

☐ Moins de 5, ☐ 5 exactement, ☐ 7 exactement, ☐ entre 5 et 7.

b. Combien de colonnes pivots une matrice 5×7 doit-elle posséder pour que ses colonnes engendrent $\mathbb{R}^5$?

☐ Moins de 5, ☐ 5 exactement, ☐ 7 exactement, ☐ entre 5 et 7.

c. L'application linéaire du plan $\mathbb{R}^2$ dont la matrice est $\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$ est

☐ une rotation ☐ une translation ☐ une projection orthogonale ☐ une homothétie