Série 14

Cette série suit le chapitre 7 du livre *Algèbre Linéaire et applications* de D. Lay.

Mots-clés : *diagonalisation en base orthonormée, décomposition spectrale, SVD*

Remarques :

1. il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre ces exercices. Des fois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours ;
2. il peut arriver que certaines questions soient reliées au cours du jeudi.

Exercice 1 (Décomposition spectrale)

On suppose que A est une matrice symétrique réelle de taille $n \times n$.

a) Montrer qu'il existe une base orthonormale $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ (pas forcément distincts) tels que

$$A = \lambda_1 \vec{u}_1 \vec{u}_1^T + \lambda_2 \vec{u}_2 \vec{u}_2^T + \ldots + \lambda_n \vec{u}_n \vec{u}_n^T. \tag{1}$$

Cette expression est appelée décomposition spectrale de A.

b) Calculer la décomposition spectrale et vérifier l'égalité (1) pour

$$\text{i)}\quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{ii)}\quad A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 (Produit par blocs)

Calculer les produits suivants en utilisant la multiplication par bloc :

a)

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ \hline 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 \end{array}\right)$$

b)

$$\left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$$

c)

$$\left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{array}\right)$$

Exercice 3 (Complément de Schur)

Soient A_{11} et A_{22} des matrices carrées.

a) On suppose que A_{11} est inversible. Déterminer X, Y et S satisfaisant

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ X & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & Y \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

où le produit matriciel de droite est compatible avec la multiplication par bloc.

b) On suppose que A_{11} et A sont inversibles. Montrer que S est inversible.

Remarque : La matrice S est appelée le *complément de Schur*.

Exercice 4 (SVD)

Chercher une décomposition en valeurs singulières des matrices suivantes.

i) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$,

ii) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

Exercice 5 (SVD)

Soit A une matrice de taille $n \times n$.

i) Montrer que A est inversible si et seulement si A possède n valeurs singulières non nulles.

ii) Si A est inversible et $U\Sigma V^T$ est une décomposition en valeurs singulières de A, donner une décomposition en valeurs singulières de A^{-1}.

Exercice 6 (SVD)

Soit A une matrice de taille $m \times n$. Et soit $A = U\Sigma V^T$ une décomposition en valeurs singulières (U est une matrice orthogonale de taille $m \times m$ et V une matrice orthogonale de taille $n \times n$). Montrer que les matrices U et V ne sont pas uniques en général mais que la matrice Σ est unique.

Exercice 7 (Preuve)

Soit A une matrice symétrique de taille $n \times n$.

a) Montrer que $A\vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{v} \cdot A\vec{u}$ pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$.

b) Donner un contre-exemple à a) pour une matrice carrée quelconque, en trouvant une matrice B de taille 2×2 telle que $B\vec{v} \cdot \vec{u} \neq \vec{v} \cdot B\vec{u}$ en général.

Exercice 8 (Diagonalisation en base orthonormée)

Diagonaliser les matrices suivantes sous la forme $A = GDG^T$, avec G une matrice orthogonale (et D une matrice diagonale).

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, on pourra utiliser le fait que les valeurs propres sont $5, 2$, et -2.

c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, on pourra utiliser le fait que les valeurs propres sont 6 et 2.

Exercice 9 (Diagonalisation en base orthonormée)

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Diagonaliser A en base orthonormée.

Exercice 10 (SVD)

Trouver une décomposition en valeurs singulières des matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercice 11 (Indépendance linéaire)

a) Les colonnes de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & 10 & -7 & 1 \\ -5 & -5 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

forment-elles un ensemble de vecteurs linéairement dépendants ?

b) Les polynômes $1, 1+t, 1+t+t^2, 1+t+t^2+t^3$ sont-ils linéairement dépendants ?

Exercice 12 (Injectivité, surjectivité)

a) Déterminer si les transformations linéaires suivantes sont injectives ou surjectives :

(a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4, T\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\2\\0\\5\end{pmatrix}$ et $T\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}3\\-6\\1\\0\end{pmatrix}$.

(b) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, T\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}x_1+x_2\\x_2+x_3\\x_3+x_4\\0\end{pmatrix}$.

(c) La rotation dans $\mathbb{R}^3$ d'axe Oz et d'angle 60^o (dans le sens trigonométrique).

b) Soit $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application linéaire. Démontrer que si T est surjective alors elle est aussi injective.

Exercice 13 (Déterminants)

Calculer les déterminants des quatre matrices suivantes (en utilisant les propriétés du déterminant et sans faire trop de calculs !)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 14 (Changement de bases)

On se donne une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix}1\\-4\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\2\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\-7\\0\end{pmatrix}\right) \quad \text{et} \quad [\vec{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}$$

où $[\vec{x}]_{\mathcal{B}}$ désigne le vecteur des coordonnées du vecteur $\vec{x}$ dans cette base. Trouver le vecteur $\vec{x}$ (c'est-à-dire ses coordonnées dans la base canonique). Trouver les coordonnées $[\vec{y}]_{\mathcal{B}}$ du vecteur

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} 10 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix}.$$