Série 13

Cette série suit les chapitres 6 et 7 du livre *Algèbre Linéaire et applications* de D. Lay.

Mots-clés : *orthogonalité, QR et moindres carrés, matrices symétriques*

Remarques :

1. il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre ces exercices. Des fois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours ;
2. il peut arriver que certaines questions soient reliées au cours du jeudi.

Exercice 1 (Inverse)

Trouver la matrice inverse A^{-1} de

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1/2} & 0 & -\sqrt{1/2} & 0 \\ \sqrt{1/3} & 0 & -\sqrt{2/3} & 0 & 0 \\ \sqrt{2/3} & 0 & \sqrt{1/3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{1/2} & 0 & \sqrt{1/2} & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 (Projection sur une droite)

Soit $\mathrm{proj}_W : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la projection sur le sous-espace W de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0\,, \\ x_1 - x_2 - 4x_3 = 0\,. \end{cases}$$

1. Donner la matrice associée à cette projection.
2. Soit A le point dont les coordonnées sont $(3, 11, -1)$. Calculer les coordonnées de la projection orthogonale de A sur W.

Exercice 3 (Projection)

Soit W le plan engendré par les vecteurs

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Est-ce que $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \in W$ est le point le plus proche de $\vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ parmi tous les points de W ? Répondre sans calculer explicitement la projection orthogonale.

Indication : Utiliser $\vec{v}_\perp$.

Exercice 4 (Orthogonal)

Soit W le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par $\vec{w}_1$ et $\vec{w}_2$, où

$$\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

a) Calculer et décrire $W^\perp$.

b) Vérifier que $\dim(W) + \dim(W^\perp) = 4$.

Exercice 5 (Moindres carrés)

On considère les points

x_i	2	5	6	8
y_i	1	2	3	3

On suppose que la relation entre les x_i et les y_i suit une loi $y = \beta_0 + \beta_1 x$. Calculer $\hat{\beta}_0$ et $\hat{\beta}_1$ au sens des moindres carrés.

Exercice 6 (Moindres carrés)

Les données suivantes décrivent le potentiel dans un câble électrique en fonction de la température du câble.

i	T_i $[°C]$	U_i $[V]$
1	0	-2
2	5	-1
3	10	0
4	15	1
5	20	2
6	25	4

On suppose que le potentiel suit la loi $U = a + bT + cT^2$. Calculer a, b, c au sens des moindres carrés.

Exercice 7 (Preuve)

Démontrer l'identité du parallélogramme : Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$, alors

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = 2\|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{v}\|^2.$$

De plus, montrer que si $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ forme une famille orthonormale, alors $\|\vec{u}-\vec{v}\| = \sqrt{2}$.

Exercice 8 (Regression linéaire)

Soient les cinq points du plan $(-2,4)$, $(-1,1)$, $(0,1)$, $(1,3)$, $(2,3) \in \mathbb{R}^2$.

a) Faire un graphe contenant les points ci-dessus.
b) Trouver la droite qui approxime le mieux (au sens des moindres carrés) les points ci-dessus.
c) Trouver la parabole qui approxime le mieux (au sens des moindres carrés) les points ci-dessus.

Exercice 9 (QR)

Soit $A = (\vec{a}_1 \ \ldots \vec{a}_n)$ une matrice $m \times n$ dont les colonnes sont linéairement indépendantes. Soient $Q = (\vec{q}_1 \ \ldots \vec{q}_n)$ et $R = (\vec{r}_1 \ \ldots \vec{r}_n)$ les matrices obtenues de la factorisation QR.

1. Montrer que $\vec{a}_i = r_{1i}\vec{q}_1 + r_{2i}\vec{q}_2 + \ldots r_{ii}\vec{q}_i$. On obtient que les colonnes de A sont des combinaisons linéaires des colonnes de Q avec comme coefficients les composantes de R.
(**Indication** : utilisez $\vec{a}_i = Q\vec{r}_i$)
2. Trouver la factorisation QR de la matrice A ci-dessous, en utilisant le point précédent pour trouver la matrice R.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque : pour trouver R on peut aussi utiliser $R = Q^T A$ mais ici vous voyez une manière alternative.

Exercice 10 (Diagonalisation)

Diagonaliser les matrices suivantes sous la forme $A = GDG^T$, avec G une matrice orthogonale (et D une matrice diagonale).

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, on pourra utiliser le fait que les valeurs propres sont $5, 2$, et -2.

Exercice 11 (Diagonalisation)

On suppose A est une matrice symétrique de taille $n \times n$.

i) Montrer qu'il existe une base orthonormale $\{u_1, \ldots, u_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que
$$A = \lambda_1 u_1 u_1^T + \lambda_2 u_2 u_2^T + \ldots + \lambda_n u_n u_n^T.$$

ii) Calculer la décomposition ci-dessus pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 12 (Matrice symétrique)

Soit A une matrice symétrique de taille $n \times n$.

a) Montrer que $A\vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{v} \cdot A\vec{u}$ pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$.

b) Donner un contre-exemple à a) pour une matrice carrée quelconque, en trouvant une matrice B de taille 2×2 telle que $B\vec{v} \cdot \vec{u} \neq \vec{v} \cdot B\vec{u}$ en général.

Exercice 13 (Diagonalisation)

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Diagonaliser A en base orthonormée.

Exercice 14 (VF)

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

a) Tout ensemble orthonormal de $\mathbb{R}^n$ est linéairement dépendant.

b) Soit W un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Si $\vec{v}$ est dans W et dans $W^\perp$, alors $\vec{v} = \vec{0}$.

c) Si U est une matrice $m \times n$ avec des colonnes orthonormales, alors $U^T U \vec{x} = \vec{x}\ \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

d) Si W est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, de dimension p $(0 < p \leq n)$, alors la méthode de Gram-Schmidt produit, à partir d'une base $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p\}$ de W, une base $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p\}$ avec $\|\vec{v}_i\| = 1, \forall i \in \{1, \ldots, p\}$.