Série 11

Cette série suit les chapitres 5 et 6 du livre *Algèbre Linéaire et applications* de D. Lay.

Mots-clés : *valeurs propres, vecteurs propres, produit scalaire, orthogonalité*

Remarques :

1. il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre ces exercices. Des fois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours ;
2. il peut arriver que certaines questions soient reliées au cours du jeudi.

Exercice 1 (Valeur propre)

a) Montrer que si λ est une valeur propre d'une matrice inversible A de taille $n \times n$, alors λ^{-1} est une valeur propre de A^{-1}. Trouver un vecteur propre correspondant.

b) Montrer que A et A^T ont le même polynôme caractéristique, et donc les mêmes valeurs propres. Montrer par un contre-exemple que les vecteurs propres de A et A^T ne sont pas les mêmes en général.

Exercice 2 (Valeurs et vecteurs propres)

Soit A une matrice 3×3 et a un nombre réel. On suppose que

$$a_{11} + a_{12} + a_{13} = a_{21} + a_{22} + a_{23} = a_{31} + a_{32} + a_{33} = a$$

Calculer $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et conclure que a est une valeur propre de A.

Exercice 3 (Diagonalisation)

Parmi les matrices suivantes, indiquer celles qui sont diagonalisables (toujours en justifiant), et le cas échéant, diagonaliser ces matrices et exhiber les vecteurs propres.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 (Diagonalisation)

Existe t-il une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $b \neq 0$, diagonalisable et ne possédant qu'une seule valeur propre de multiplicité algébrique 2 ?

Exercice 5 (Matrice d'application)

Soit $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices symétriques de taille 2×2, dont une base est donnée par $\mathcal{B} = \{S_1, S_2, S_3\}$ où

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad S_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $T : \mathcal{S}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ la transformation linéaire définie par

$$T \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a - d & -b \\ -b & -a + 2d \end{pmatrix}.$$

a) Calculer les 3 valeurs propres (distinctes) $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ de T.

b) Trouver un vecteur propre $M_i \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ associé à chaque λ_i. Montrer que $\mathcal{B}' = \{M_1, M_2, M_3\}$ est une base de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$.

c) Ecrire la matrice de T par rapport à la base $\mathcal{B}'$.

d) Calculer $T^{10}(A)$, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Indication : On s'aidera de la matrice $[T]_{\mathcal{B}}$ associée à l'application T.

Exercice 6 (Rang)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer le rang de A et la dimension du noyau de A.

b) Même question pour A^T.

c) On suppose qu'une matrice A de taille 7×7 possède un pivot dans chaque ligne. Quel est le rang de A ? Quelle est la dimension du noyau de A ?

d) On considère une matrice A de taille $m \times n$ et un vecteur $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$. Quelle doit être la relation entre le rang de $[\,A\ \vec{b}\,]$ et le rang de A pour que l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ soit compatible ?

Exercice 7 (Produit scalaire)

Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.

b) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$.

c) $(\alpha\vec{u}) \cdot \vec{v} = \alpha\,(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (\alpha\vec{v})$.

d) $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$ et $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0$ si et seulement si $\vec{u} = \vec{0}$.

Exercice 8 (Orthogonalité)

a) Trouver un vecteur non nul orthogonal à $\vec{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Soient $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$. Calculer

$$\vec{u} \cdot \vec{v}, \quad \vec{v} \cdot \vec{w}, \quad \frac{\vec{u} \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}\|}, \quad \frac{1}{\vec{w} \cdot \vec{w}}\vec{w}, \quad \frac{\vec{u} \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}\|}\vec{v}.$$

c) Calculer la distance entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et la distance entre $\vec{u}$ et $\vec{w}$.

d) Calculer les vecteurs unitaires correspondant à $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ (pointant dans la même direction que le vecteur original).

Exercice 9 (L'orthogonal)

Soit $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Donner l'ensemble W des vecteurs orthogonaux à $\vec{v}$. Est-ce un espace vectoriel ? Si oui, de quelle dimension ?

Exercice 10 (Valeurs propres)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Calculer ses valeurs propres.

Exercice 11 (Rang)

a) Montrer que les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -19 \\ 0 & 1 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{2} \end{pmatrix}$ sont équivalentes.

b) Calculer $\operatorname{rang}(A)$, $\dim \operatorname{Ker} A$, $\operatorname{rang}(B)$, $\dim \operatorname{Ker} B$.

c) Trouver une base de $\operatorname{Ker} A$ et $\operatorname{Ker} B$.

Exercice 12 (VF)

Soit A une matrice de taille $n \times n$. Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses (justifier).

V F

a) A est diagonalisable si et seulement si elle possède n valeurs propres distinctes. ☐ ☐

b) A est diagonalisable si A possède n vecteurs propres. ☐ ☐

c) Si A est diagonalisable, alors A est inversible. ☐ ☐

d) Si A est inversible, alors A est diagonalisable. ☐ ☐

e) Si 0 est valeur propre, alors $\operatorname{rang}(A) < n$. ☐ ☐

f) Pour tout matrice inversible P de taille $n \times n$, λ est une valeur propre de A si et seulement si λ est une valeur propre de $P^{-1}AP$. ☐ ☐

Exercice 13 (VF)

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

V F

a) Un espace propre d'une matrice carrée A est l'espace nul d'une certaine matrice. ☐ ☐

b) Soit A une matrice carrée. Si A^2 est la matrice nulle, alors la seule valeur propre de A est 0. ☐ ☐

c) Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont les éléments de sa diagonale principale. ☐ ☐

d) L'ensemble $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ des vecteurs propres associés aux valeurs propres distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ d'une matrice carrée A est linéairement dépendant. ☐ ☐

Exercice 14 (QCM)

a. Soit A une matrice de taille 3×3 inversible et λ une valeur propre de A.

- ☐ Alors λ^{-1} est une valeur propre de $-A$.
- ☐ Alors λ est une valeur propre de $-A$.
- ☐ Alors λ^{-1} est une valeur propre de A^{-1}.
- ☐ Alors λ est une valeur propre de A^{-1}.

b. Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

- ☐ Alors seulement 6 est une valeur propre de A.
- ☐ Alors -6 et -4 sont valeurs propres de A.
- ☐ Alors 6 et 0 sont valeurs propres de A.
- ☐ Alors -4 et 6 sont valeurs propres de A.

c. Soit $\mathcal{B} = (1-t, 1+t, 1+t+t^2)$ et $\mathcal{C} = (1, t-\frac{1}{2}, t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4})$.

- ☐ Alors $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{P}_2$, mais pas $\mathcal{C}$.
- ☐ Alors $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{P}_2$, et $\mathcal{C}$ aussi.
- ☐ Alors $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{P}_2$, mais pas $\mathcal{B}$.
- ☐ Alors $\mathcal{B}$ n'est pas une base de $\mathbb{P}_2$, et $\mathcal{C}$ non plus.

d. Soit $\mathcal{B} = (1-t, 1+t, 1+t+t^2)$ et $\mathcal{C} = (1, t-\frac{1}{2}, t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4})$. Soit encore S la matrice de changement de base de B à C et soit T la matrice de changement de base de C à B.

- ☐ Alors $s_{13} = 0$ et $t_{23} = 0$.
- ☐ Alors $s_{13} = 9/16$ et $t_{23} = 3/2$.
- ☐ Alors $s_{13} = -1$ et $t_{23} = -3/4$.
- ☐ Alors $s_{13} = 3/2$ et $t_{23} = -9/8$.

e. Soit A une matrice de taille 2×2 qui n'est pas inversible. Alors

- ☐ 0 est une valeur propre de A.
- ☐ A est la matrice nulle.
- ☐ A n'a pas de valeur propre réelle.
- ☐ tout vecteur de $\mathbb{R}^2$ est un vecteur propre de A.