Révision :

Chap. I : **Systèmes linéaires**

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$$

$\Rightarrow$ $x_1\vec{a}_1 + \dots + x_n\vec{a}_n = \vec{b}$ forme vectorielle

Solution $\vec{s} = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \iff$

$\vec{b}$ est comb. linéaire des colonnes de A avec coefficients donnés par les s_i.

Recherche de solutions : alg. Gauss-Jordan

$\rightsquigarrow$ forme E / ER

$\Rightarrow$ pivot

- cas 1 : $(0 \mid *)$ pivot dans le terme constant $\Rightarrow$ syst. inconsistant : $\emptyset$
- sinon : pas de ligne non nulle
  - cas 2 : pas de variable libre (1 pivot par colonne) , 1
  - cas 3 : au moins 1 variable libre : ∞ (sol. à décrire avec des paramètres) :

⚠ th. 5 $A\vec{x} = \vec{b}$ compatible $\forall \vec{b} \in \mathbb{R}^m$ $\boxed{}$ $m \leq n$

$\iff \dots$

Application linéaire $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \iff A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$

via $T(\vec{e}_i) = \vec{a}_i \in \mathbb{R}^m$ $(\forall 1 \leq i \leq n)$

base canonique

- th. 5 est complété par

"T est surjective"

- l'injectivité est équivalente à l'indép. lin. des colonnes de A n colonnes $\rightsquigarrow$ n vecteurs de $\mathbb{R}^m$ $\rightsquigarrow$ $n \leq m$

T est bijective $\Rightarrow$ $n = m$!

chap. 2 **Matrices**

⚠ à l'arithmétique

(ex : $AB = AC \not\Rightarrow B = C$ (*) faux en général

si A est inversible : $A^{-1}AB = A^{-1}AC$

$\Rightarrow I B = I C$

$\Rightarrow B = C$

⚠ th. 23 fondamental

chap. 3 **Déterminants**

<u>propriétés</u> :

- 2 colonnes ou 2 lignes identiques $\Rightarrow$ dét nul
- $\det(A) = \det(A^T)$
- si B est obtenue à partir de A en multipliant une ligne ou une colonne par α, alors
$$\det(B) = \alpha \det(A)$$
- $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

chap. 4 **EV**

- exemples classiques
$$\mathbb{R}^n \,/\, M_{m\times n}(\mathbb{R}) \,/\, \mathbb{P}_n \,/\, \mathbb{P}$$
- Si $T : V \to W$ avec V et W de dimension finie, alors T peut être représenté par une matrice.

V fcts dérivables sur $(0,1)$ $\quad f : (0,1) \to \mathbb{R}$

W " sur $(0,1)$

L'appl. $T(f) = f'$ (dérivée) est linéaire, mais ne peut être représenté par une matrice.

- chgts de base
- si T peut être représenté par A,
$\rightsquigarrow \operatorname{Ker}(A)$, $\operatorname{Im}(A)$

- les colonnes pivots engendrent $Im(A)$
- $\dim Ker(A)$ = nbre de colonnes non pivot

$\rightsquigarrow$ th. du rang $\quad A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$

$$\underbrace{\dim Ker(A)}_{\text{col. non pivot}} + \underbrace{rang(A)}_{\text{col. pivot}} = \underbrace{n}_{\text{colonnes}}$$

$Lgn(A) = Im(A^T)$ par construction

$\rightarrow$ th. ⚠ (45) $\quad \dim Lgn(A) = \dim Im(A)$

⚠ $(A^T)_{ER} \neq (A_{ER})^T$

(l'ordre n'est pas interchangeable !)

chap. 5 **valeurs et vecteurs propres**

$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ (*) $\quad \lambda$ est vp s'il existe un vecteur $\vec{v}$ non nul qui satisfait (*)

$P_A(\lambda)$: si μ est vp, alors

$$P_A(\lambda) = (\lambda - \mu)\, p'(\lambda)$$

↘ division euclidienne

$\deg p' = \deg P_A(\lambda) - 1$

- $(-1)^n$ coeff. λ^n
- $(-1)^{n-1} Tr(A)$ coeff. λ^{n-1}
- $\det(A)$ terme constant
- pour trouver une sol. par tâtonnement, tester tous diviseurs du terme constant.

chap. 6 **orthogonalité** $\quad A\vec{x} = \vec{b}$ incompatible

$\rightsquigarrow$ solution approchée

- $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n \in \mathbb{R}$$

(produit scalaire)

$= \vec{u}^T \vec{v}$ (produit matriciel)

$= \underset{1\times n}{(u_1 \dots u_n)} \underset{n\times 1}{\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}} = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n$

$\in M_{1\times 1}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$

- $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ base orthogonale (⚠ à l'ordre)
  $\hookrightarrow \vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = 0 \quad i \neq j$
- $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ base orthonormale avec en plus
  $\vec{u}_i \cdot \vec{u}_i = 1$ (vecteurs de norme 1)

U matrice orthogonale : (carré !)

les vecteurs colonnes sont orthogonaux et de norme 1 car $U^T U = I_n$

⚠ Si U est une matrice $\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ avec des colonnes orthogonales, alors on a

$U^T U = I_n$ mais en général

$U U^T \neq I_m$

UU^T est la matrice de la projection orthogonale sur le SEV engendré par les colonnes de U.

On a $UU^T =$ identité si la proj. orthogonale est l'appl. identité (si on projette sur l'espace tout entier).