Série 4 (Corrigé)

Exercice 1 ((In)dépendance linéaire et span)

a) Les vecteurs $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ sont-ils linéairement dépendants ?

b) Les vecteurs $\overrightarrow{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ engendrent-ils $\mathbb{R}^3$?

c) Les vecteurs $\overrightarrow{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ engendrent-ils $\mathbb{R}^4$?

Sol.:

a) On effectue des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice obtenue en plaçant les vecteurs colonne par colonne. On commencera par diviser la première ligne par -8, puis on utilise cette ligne pour obtenir des zéros dans la dernière colonne, enfin on échange les lignes 1 et 3 :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Les vecteurs $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ et $\mathbf{u}_3$ ne sont donc pas linéairement dépendants car la matrice échelonnée contient un pivot dans chaque colonne.

b) La matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ -1 & 7 & -2 \end{pmatrix}$ s'échelonne en trois opérations en $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Il y a un pivot dans chaque ligne si bien que tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ s'exprime comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_3$.

c) Il y a trop de lignes pour que trois vecteurs de $\mathbb{R}^4$ (ceux-ci ou d'autres) puissent engendrer $\mathbb{R}^4$. Il faudrait quatre pivots dans la matrice de taille 4×3 qu'on construit en plaçant ces vecteurs dans les colonnes, alors qu'il ne peut y en avoir plus de trois.

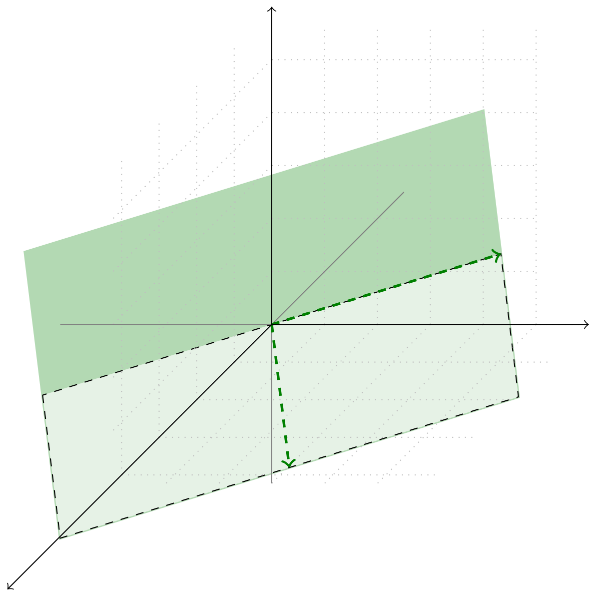
Exercice 2 (Span)

Soient $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Donner une interprétation géométrique de Vect$\{\vec{v_1}, \vec{v_2}\}$.

b) Est-ce que $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est dans le Vect$\{\vec{v_1}, \vec{v_2}\}$?

Sol.: *Il s'agit d'un plan incliné passant par l'origine.*



Le vecteur $\vec{b}$ n'en fait par partie. Soit on se convainc par le graphe, soit on essaie de trouver les coefficients λ_1, λ_2 tels que $\vec{b} = \lambda_1 \vec{v_1} + \lambda_2 \vec{v_2}$. On obtient une ligne du type $(0 \cdots 0|*)$ et le système est incompatible.

Exercice 3 (Span)

Soient $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Montrer que pour tous h et $k \in \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} h \\ h \\ k \end{pmatrix}$ appartient à Vect$\{\vec{v_1}, \vec{v_2}\}$.

Sol.: *On cherche les coefficients λ_1 et λ_2 tels que $\vec{b}$ soit combinaison linéaire de $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$. On trouve*

$$\lambda_1 = \frac{3h - k}{6}, \quad \lambda_2 = \frac{k}{3}.$$

Exercice 4 (Solution paramétrée)

Pour chacun des systèmes suivants :

i) Écrire la matrice augmentée.

ii) Transformer la matrice augmentée sous forme échelonnée réduite.

iii) Identifier les variables de bases (principales) et les variables libres (secondaires), et écrire la solution générale.

a) $\left\{\begin{array}{rcrcl} 2x_1 & + & x_2 & = & 8 \\ 4x_1 & - & 3x_2 & = & 6 \end{array}\right.$

b) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ -2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & -1 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{rcrrrcr} x_1 & + & 2x_2 & & & = & 1 \\ & & & x_3 & & = & 2 \\ & & & & x_4 & = & -1 \end{array}\right.$

d) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \end{array}\right.$

e) $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & + & 2x_5 & = & 3 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & + & 3x_5 & = & 2 \end{array}\right.$

Sol.:

a) Matrice augmentée :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 4 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

Forme échelonnée réduite :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Variables de bases : x_1 et x_2. Pas de variable libre. Solution générale :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 & = & 3 \\ x_2 & = & 2 \end{array}\right.$$

b) Matrice augmentée :

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Forme échelonnée réduite :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Variables de bases : x_1, x_2, x_3. Pas de variable libre. Solution générale :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 & = & -1 \\ x_2 & = & 1 \\ x_3 & = & 1 \end{array}\right.$$

c) Matrice augmentée :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Déjà sous forme échelonnée réduite. Variables de bases : x_1, x_3, x_4. Variable libre : x_2. Solution générale :

$$\begin{cases} x_1 &= 1 - 2x_2 \\ x_3 &= 2 \\ x_4 &= -1 \end{cases}$$

d) *Matrice augmentée :*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Forme échelonnée réduite :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pas de solution. Théoriquement, variable de base : x_1, variables libres : x_2, x_3.

e) *Matrice augmentée :*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Forme échelonnée réduite :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Variables de bases : x_1, x_4, x_5. Variables libres : x_2, x_3. Solution générale :

$$\begin{cases} x_1 &= 1 - x_2 - x_3 \\ x_4 &= 2 \\ x_5 &= -1 \end{cases}$$

Exercice 5 (Preuve)

Prouver l'affirmation suivante :

Soit l'ensemble $\{\vec{v_1}, \dots, \vec{v_p}\}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Si $p < n$ alors l'ensemble ne peut pas être une base de $\mathbb{R}^n$.

Sol.: *Pour être une base de $\mathbb{R}$ il faut que pour tout $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{b} \in \mathrm{Vect}\{\vec{v_1}, \dots, \vec{v_p}\}$. C'est à dire que l'équation vectorielle $x_1\vec{v_1} + \dots x_p\vec{v_p} = \vec{b}$ admette une solution. Mais pour avoir une solution pour chaque $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$, il faut que la matrice $A = (\vec{v_1} \cdots \vec{v_p})$ de taille $n \times p$ ait un pivot dans chaque ligne et donc qu'il n'y ait pas de ligne de zéros. Or comme $p < n$, la matrice a plus de lignes que de colonnes, donc au mieux la matrice A possède p pivots. Ainsi la matrice aura des lignes de zéros :*

$$A = \begin{pmatrix} * & & & \\ 0 & * & & \\ 0 & 0 & * & \\ 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

et le système correspondant à $A\vec{v} = \vec{b}$ sera incompatible pour certains $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$.

Exercice 6 (Solutions paramétrées)

Soit
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 & 8 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ecrire l'ensemble solution de l'équation $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ sous forme paramétrique vectorielle.

Sol.: *Pour réduire la matrice A qui est déjà échelonnée, il suffit d'effectuer deux opérations : $L_1 + 2L_3$ et $L_2 - 6L_3$:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 & 8 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 & 8 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On voit ici qu'il y a trois inconnues principales, celles des colonnes pivot, x_1, x_3 et x_6, et 3 inconnues libres (x_2, x_4 et x_5) que l'on utilise comme paramètres pour décrire la solution générale du système :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{pour } s, t, u \in \mathbb{R}$$

Exercice 7 (Solution)

Déterminer les valeurs du nombre réel a pour lesquelles le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = a \\ 2x + ay + 4z = -4 \\ -x + y + az = 2 \end{cases}$$

possède des solutions. Déterminer ces solutions.

Sol.: *Les opérations élémentaires sur les lignes de la matrice augmentée du système nous donnent :*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 2 & a & 4 & -4 \\ -1 & 1 & a & 2 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{\widetilde{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & a-4 & -2 & -2a-4 \\ 0 & 3 & a+3 & a+2 \end{array}\right)$$

$$\widetilde{L_2 \leftrightarrow L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & 3 & a+3 & a+2 \\ 0 & a-4 & -2 & -2(a+2) \end{array}\right)$$

$$\widetilde{L_2 \to \frac{1}{3}L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & 1 & \frac{1}{3}(a+3) & \frac{1}{3}(a+2) \\ 0 & a-4 & -2 & -2(a+2) \end{array}\right)$$

$$\widetilde{L_3 \leftarrow L_3 - (a-4)L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & 1 & \frac{1}{3}(a+3) & \frac{1}{3}(a+2) \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}(a+2)(a-3) & -\frac{1}{3}(a+2)^2 \end{array}\right)$$

Remarque : *Nous avons échangé les lignes L_2 et L_3 pour ne pas avoir à diviser par $a-4$.*

Nous allons distinguer trois cas :

$$a = 3, \quad a = -2 \quad \textit{et} \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}.$$

- $a = 3$ *: La matrice augmentée devient*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{25}{3} \end{array}\right)$$

et le système n'a pas de solution car $0 \neq -\frac{25}{3}$.

- $a = -2$ *: La matrice augmentée devient*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \widetilde{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{7}{3} & -2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

et le système associé

$$\left\{\begin{array}{l} x \quad + \frac{7}{3}z = -2 \\ \quad y + \frac{1}{3}z = \ \ 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = -2 - \frac{7}{3}z \\ y = \quad\ \ -\frac{1}{3}z \end{array}\right.$$

possède une infinité de solutions :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \textit{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

• $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}$ *: Le système associé*

$$\begin{cases} x + 2y + \quad\quad 3z = a \\ \quad\quad 3y + (a+3)z = a + 2 \\ \quad\quad\quad\quad (a-3)z = a + 2 \end{cases}$$

possède une unique solution

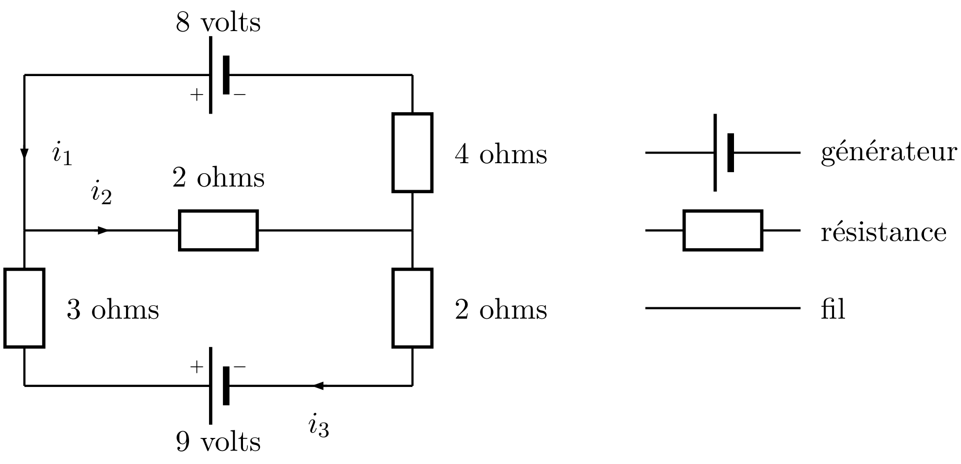
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{a-3} \begin{pmatrix} a^2 - 2a + 2 \\ -2(a+2) \\ a+2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8 (Kirchhoff)

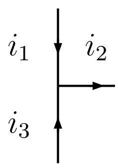
<u>Les deux lois de Kirchhoff</u>

1. À chaque nœud (embranchement) d'un circuit électrique, la somme des courants (intensités) qui entrent dans le nœud est égale à la somme des courants qui en sortent.
2. La somme des tensions (différences de potentiels) le long de tout circuit fermé est nulle (l'augmentation du potentiel est comptée avec + et la diminution avec −).

On rappelle que la chute de potentiel U dans une résistance R traversée par un courant d'intensité I est donnée par la loi d'Ohm $U = RI$.
Déterminer les intensités i_1, i_2, i_3 dans le circuit suivant.



Sol.: *Appliquons la 1ère loi de Kirchhoff au nœud situé au dessus de la résistance de 3 ohms.*



$$i_1 + i_3 = i_2.$$

Appliquons la seconde loi de Kirchhoff à la boucle du haut (sens anti-horaire, en partant du générateur) :

$$8 - 2i_2 - 4i_1 = 0.$$

De même avec la boucle du bas (maintenant dans le sens horaire) :

$$9 - 3i_3 - 2i_2 - 2i_3 = 0.$$

La matrice augmentée du système et sa forme échelonnée réduite sont :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 & -8 \\ 0 & -2 & -5 & -9 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

d'où la solution :

$$i_1 = 1, \qquad i_2 = 2, \qquad i_3 = 1.$$

Exercice 9 (Transformation linéaire)

Trouver les matrices correspondant aux transformations linéaires suivantes (exprimées dans la base canonique) :

a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$

Sol.:

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

Exercice 10 (Transformation linéaire)

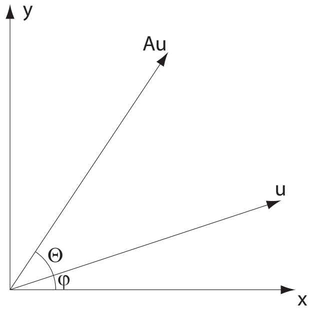
Décrire géométriquement la transformation linéaire suivante : $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donnée par

$$T(\vec{u}) = A\vec{u} \qquad \text{où } A = \begin{pmatrix} \cos\Theta & -\sin\Theta \\ \sin\Theta & \cos\Theta \end{pmatrix}.$$

Indication : Calculer les images de $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ par T.

Sol.:

Les images de $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *sont* $\begin{pmatrix} \cos\Theta \\ \sin\Theta \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} -\sin\Theta \\ \cos\Theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}+\Theta) \\ \sin(\frac{\pi}{2}+\Theta) \end{pmatrix}$*, respectivement. La transformation linéaire correspond à une rotation anti-horaire d'angle* Θ*.*



On peut aussi décrire la transformation de la façon suivante. Un vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ *s'écrit en coordonnées polaires* $\vec{u} = r\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$*, et par les formules d'addition d'angles on calcule*

$$A\vec{u} = r\begin{pmatrix} \cos\Theta\cos\varphi - \sin\Theta\sin\varphi \\ \sin\Theta\cos\varphi + \cos\Theta\sin\varphi \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} \cos(\Theta+\varphi) \\ \sin(\Theta+\varphi) \end{pmatrix}.$$

On voit que la longueur r *n'est pas modifiée par la transformation* T*, mais l'angle* φ *est remplacé par* $\Theta + \varphi$*, donc* T *est bien une rotation d'angle* Θ*.*

Exercice 11 (QCM : span)

Soit $\mathrm{Vect}\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$ avec

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Laquelles des informations suivantes est correcte ?

- ☐ $\mathrm{Vect}\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\} = \mathbb{R}^3$.
- ☐ Le $\mathrm{Vect}\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$ est une droite.
- ☐ Le $\mathrm{Vect}\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$ est un plan.
- ☐ Le $\mathrm{Vect}\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$ est ne contient que $\vec{0}$.

Sol.: *Le* Vect *correspond au plan contenant les points de coordonnées* $(x, y, 0)$*, avec* $x, y \in \mathbb{R}$*. Il ne peut pas être égal à* $\mathbb{R}^3$ *car il manque la troisième composante dans* $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$*.*

Exercice 12 (QCM : solutions)

a) Pour quelle valeur de h la matrice suivante est-elle la matrices augmentée d'un système linéaire compatible (consistant) :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & h \\ -2 & 6 & -5 \end{array}\right)$$

- ☐ $h = 5$,
- ☐ $h = 5/2$,
- ☐ $h \neq 5/2$,
- ☐ $h = -5/2$.

b) Même question pour la matrice

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & h & 4 \\ 3 & 6 & 8 \end{array}\right).$$

- ☐ $h = 2$,
- ☐ $h = -2$,
- ☐ $h \neq 2$,
- ☐ $h \neq -2$.

Sol.:

a) On a l'équivalence

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & h \\ -2 & 6 & -5 \end{array}\right) \sim_{L_2+2L_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & h \\ 0 & 0 & 2h-5 \end{array}\right).$$

Le système linéaire correspondant à cette matrice est :

$$\begin{aligned} x - 3y &= h \\ 0 &= 2h - 5, \end{aligned}$$

il est consistant si et seulement si $2h - 5 = 0$, c'est-à-dire si $h = 5/2$.

b) On a l'équivalence :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & h & 4 \\ 3 & 6 & 8 \end{array}\right) \sim_{-L_2+3L_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & h & 4 \\ 0 & 3h-6 & 4 \end{array}\right).$$

Le système linéaire correspondant à la dernière matrice est

$$\begin{aligned} x + hy = & \quad 4 \\ (3h-6)y = & \quad 4\,. \end{aligned}$$

Il est consistant si et seulement si $3h - 6 \neq 0$, c'est à dire si $h \neq 2$.

Exercice 13 (Vrai-faux)

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

V F

a) Deux vecteurs sont linéairement dépendants si et seulement s'ils se trouvent sur une même droite qui passe par l'origine. ☐ ☐

b) Si un ensemble comporte moins de vecteurs que le nombre de composantes de ceux-ci, alors il est linéairement indépendant. ☐ ☐

c) Une équation homogène est toujours compatible. ☐ ☐

d) Si $\vec{x}$ est une solution non triviale de $A\vec{x} = \vec{0}$, alors aucune composante de $\vec{x}$ est nulle. ☐ ☐

Sol.: *Vrai : a), c). Faux : b), d).*

Exercice 14 (Vrai-faux)

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

V F

a) Les vecteurs $\vec{u} - \vec{v}$, $\vec{u} - \vec{w}$ et $\vec{v} - \vec{w}$ sont linéairement dépendants pour tout choix de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$. ☐ ☐

b) Un ensemble formé d'un seul vecteur est linéairement indépendant. ☐ ☐

c) Une matrice 6×4 doit posséder quatre pivots pour que ses colonnes soient linéairement indépendantes. ☐ ☐

d) Les colonnes d'une matrice 3×4 engendrent $\mathbb{R}^3$. ☐ ☐

Sol.: *a),c) vraies. b), d) fausses.*