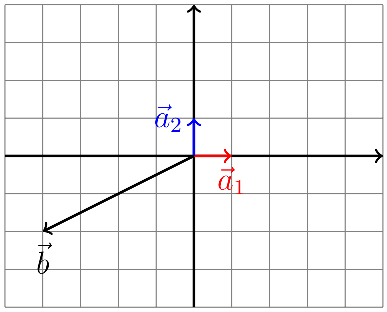
Série 3 (Corrigé)

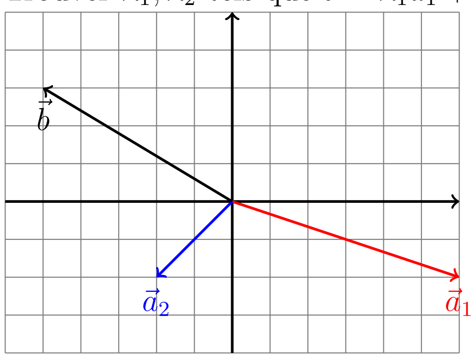
Exercice 1 (Combinaisons linéaires)

À l'aide des graphes ci-dessous, trouver les coefficients des combinaisons linéaires demandées. Il se peut qu'il existe plusieurs solutions, ou aucune solution. Dans les graphes ci-dessous, un carré =1 unité.

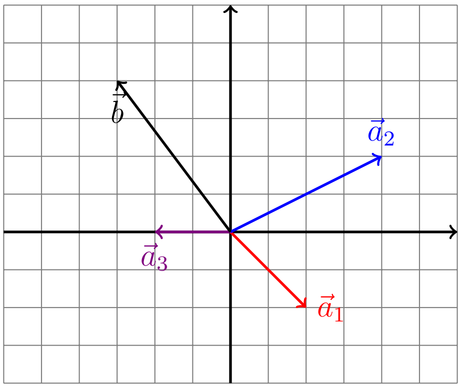
a) Trouver λ_1, λ_2 tels que $\vec{b} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2$



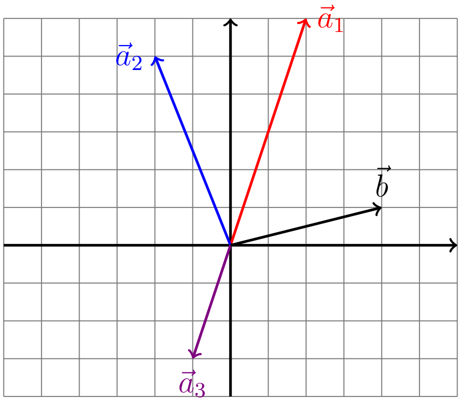
b) Trouver λ_1, λ_2 tels que $\vec{b} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2$



c) Trouver $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que $\vec{b} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \lambda_3\vec{a}_3$



d) Trouver $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que $\vec{b} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \lambda_3\vec{a}_3$. Peut-on trouver μ_1 et μ_3 tels que $\vec{b} = \mu_1\vec{a}_1 + \mu_3\vec{a}_3$?



Sol.:

a) $\lambda_1 = -4, \lambda_2 = -2$

b) $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -1/2$

c) Il y a une infinité de solutions. En voici une : $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 0$ *et* $\lambda_3 = -1/2$

d) Il y a une infinité de solutions. En voici deux : $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$ *et* $\lambda_3 = -2$ *ou* $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ *et* $\lambda_3 = 0$*. Non on ne peut pas trouver de* μ_1 *et* μ_3 *tels que* $\vec{b}$ *soit une combinaison linéaire de* $\vec{a}_1$ *et* $\vec{a}_3$*, car ces deux vecteurs sont colinéaires.*

Une autre méthode est d'écrire les systèmes d'équations qui correspondent aux équations vectorielles à résoudre.

Exercice 2 (Combinaison linéaire)

a) Soient les vecteurs

$$\overrightarrow{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ h \end{pmatrix}.$$

i) Pour quelle(s) valeur(s) de h le vecteur $\overrightarrow{w}$ peut-il être obtenu comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{v}_1$ et $\overrightarrow{v}_2$?

ii) Dans ce cas quels sont les coefficients respectifs a_1, a_2 des vecteurs $\overrightarrow{v}_1$ et $\overrightarrow{v}_2$?

b) Le vecteur $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$, se trouve-t-il dans le plan de $\mathbb{R}^3$ engendré par les colonnes de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 1 \\ -2 & -8 \end{pmatrix}$$

Justifiez votre réponse.

Sol.:

a) Tout élément de l'espace engendré par $\overrightarrow{v}_1$, $\overrightarrow{v}_2$ est de la forme

$$a_1\overrightarrow{v}_1 + a_2\overrightarrow{v}_2 = a_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

où a_1 et a_2 sont des reéls. Le vecteur $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ h \end{pmatrix}$ est engendré par $\overrightarrow{v}_1$, $\overrightarrow{v}_2$ si et seulement il existe des réels, a_1 et a_2 tels que l'équation vectorielle suivante soit satisfaite :

$$a_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ h \end{pmatrix}$$

Sous forme matricielle on effectue des opérations en essayant de ne pas traîner des fractions :

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 10 \\ 2 & 3 & h \end{pmatrix} \sim_{L_1 \leftrightarrow L_2 \cdot 1/2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & h \end{pmatrix} \sim^{L_2 - 2L_1}_{L_3 - L_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 2 & h-5 \end{pmatrix} \sim_{L_3 - 2L_2}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & h+9 \end{pmatrix} \sim_{(L_1 - L_2)\cdot 1/2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & h+9 \end{pmatrix}$$

D'où $h = -9$ pour satisfaire le théorème 2 avec $a_1 = 6$, $a_2 = -7$.

b) Pour voir si le vecteur $\overrightarrow{v}$ est dans le plan engendré par les colonnes de A, on construit une nouvelle matrice $B = [A \quad \overrightarrow{v}]$, alors la forme échelonnée réduite de B montre que

$$\overrightarrow{v} = -5 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -8 \end{bmatrix}$$

et donc $\overrightarrow{v}$ est bien dans ce plan.

Exercice 3 (Combinaisons linéaires et solutions)

Considérons le système linéaire

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & - & 5x_3 & = & 4 \\ x_1 & + & 4x_2 & - & 8x_3 & = & 7 \\ -3x_1 & - & 7x_2 & + & 9x_3 & = & -6. \end{array}\right.$$

a) Écrire le système sous forme matricielle $A\vec{x} = \vec{b}$.
b) Écrire le système comme une combinaison linéaire des colonnes de la matrice A.
c) Trouver la solution de l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$.
d) Subsidiaire : écrire l'ensemble des solutions en fonction d'un paramètre.

Sol.:

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 1 & 4 & -8 \\ -3 & -7 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix}$$

b)

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -5 \\ -8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix}$$

c) La matrice augmentée est

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 4 \\ 1 & 4 & -8 & 7 \\ -3 & -7 & 9 & -6 \end{pmatrix},$$

et la forme échelonnée réduite est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La variable x_3 est libre, on peut donc écrire l'ensemble des solutions comme

$$\left\{\begin{array}{ll} x_1 & = -5 - 4x_3 \\ x_2 & = 3 + 3x_3 \\ x_3 & \textit{libre} \end{array}\right.$$

d) En posant $x_3 = t \in \mathbb{R}$, on en déduit que les solutions (s_1, s_2, s_3) sont données par

$$s_3 = t,\ t \in \mathbb{R},\ s_1 = -5 - 4t,\ s_2 = 3 + 3t.$$

On en déduit l'ensemble des solutions :

$$\left\{ \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 4 (Combinaisons linéaires)

Considérons les vecteurs $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$, et $\vec{b} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Pour quelle(s) valeur(s) de α le vecteur $\vec{b}$ est-il une combinaison linéaire de $\vec{a}_1$ et $\vec{a}_2$?

Sol.: *Considérons le système linéaire $x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 = \vec{b}$. En coordonnées, on obtient le système*

$$\begin{cases} \begin{array}{rrcr} x_1 & -3x_2 & = & \alpha \\ & x_2 & = & -5 \\ -2x_1 & +8x_2 & = & -3 \end{array} \end{cases}$$

avec la matrice augmentée

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & \alpha \\ 0 & 1 & -5 \\ -2 & 8 & -3 \end{pmatrix}.$$

Après des opérations élémentaires sur les lignes, on obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -15+\alpha \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 7+2\alpha \end{pmatrix}.$$

On voit que le système est compatible si et seulement si $7 + 2\alpha = 0$, i.e. $\alpha = -\frac{7}{2}$. Dans ce cas, la matrice ci-dessus est la forme échelonnée réduite.
(Remarque : Lorsque $7+2\alpha \neq 0$, le système est incompatible, et la forme échelonnée réduite est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad)$$

En résumé, le vecteur $\vec{b}$ est une combinaison linéaire de $\vec{a}_1$ et $\vec{a}_2$ si et seulement si $\alpha = -\frac{7}{2}$.

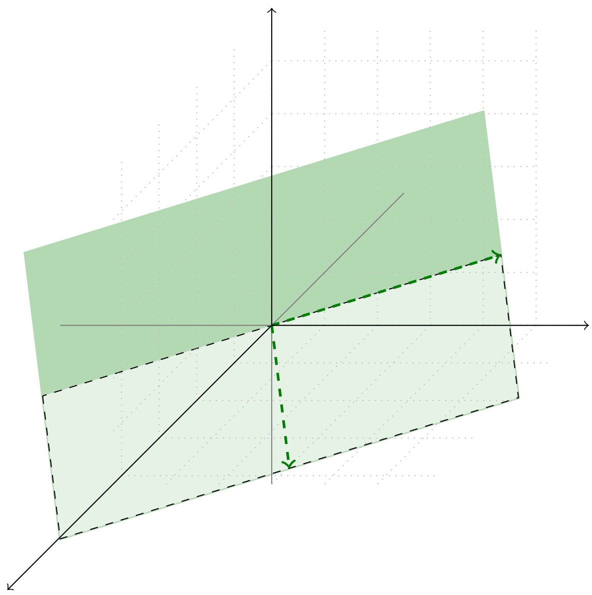
Exercice 5 (Span)

Soient $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Donner une interprétation géométrique de $\mathrm{Vect}\{\vec{v_1}, \vec{v_2}\}$.

b) Est-ce que $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est dans le $\mathrm{Vect}\{\vec{v_1}, \vec{v_2}\}$?

Sol.: *Il s'agit d'un plan incliné passant par l'origine.*



Le vecteur $\vec{b}$ n'en fait par partie. Soit on se convainc par le graphe, soit on essaie de trouver les coefficients λ_1, λ_2 tels que $\vec{b} = \lambda_1\vec{v_1} + \lambda_2\vec{v_2}$. On obtient une ligne du type $(0\cdots 0|*)$ et le système est incompatible.

Exercice 6 (Produit matrices-vecteurs)

Calculer $A(\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2)$, où

a)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3;$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \alpha_1 = -1, \alpha_2 = 1.$$

Sol.:

a)

$$A(\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2) = \begin{pmatrix} 17 \\ 12 \\ 36 \end{pmatrix}.$$

b)

$$A(\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2) = \begin{pmatrix} 18 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7 ((In)dépendance linéaire)

Décrire quelle est la forme échelonnée réduite dans les cas suivants :

a) A est une matrice 3×3 avec des colonnes linéairement indépendantes.

b) A est une matrice 4×2, $A = (\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2)$ et $\vec{a}_2$ n'est pas un multiple de $\vec{a}_1$.

c) A est une matrice 4×3, $A = (\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad \vec{a}_3)$. Les vecteurs $\vec{a}_1$ et $\vec{a}_2$ sont linéairement indépendants, et $\vec{a}_3$ n'est pas une combinaison linéaire de $\vec{a}_1$ et $\vec{a}_2$.

Sol.:

a) Comme les colonnes de A sont linéairement indépendantes, le système homogène $A\vec{x} = \vec{0}$ n'admet que la solution triviale. Ainsi la forme échelonnée réduite s'écrit $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Si $\vec{a}_2$ n'est pas un multiple de $\vec{a}_1$, alors il n'existe pas $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{a}_2 = \lambda \vec{a}_1$. Deux cas sont possibles.

Si $\vec{a}_1 \neq \vec{0}$, alors les deux vecteurs $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ sont linéairement indépendants, et la forme échelonnée réduite est : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Si $\vec{a}_1$ est le vecteur nul, alors le vecteur $\vec{a}_2$ est non nul (car non multiple de $\vec{0}$), et la forme échelonnée réduite est : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

c) $\vec{a}_1$ et $\vec{a}_2$ sont linéairement indépendants, donc ils engendrent un plan, c'est-à-dire un espace de dimension 2. Le vecteur $\vec{a}_3$ n'est pas dans cet espace, car ce n'est pas une combinaison linéaire de $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$. Par conséquent, les trois vecteurs $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ engendrent un espace de dimension 3, ils sont linéairement indépendants.

D'où la forme échelonnée réduite de A : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 8 ((In)dépendance linéaire)

Les vecteurs suivants sont-ils linéairement indépendants ? Engendrent-ils $\mathbb{R}^3$ (questions a) et b)) ou $\mathbb{R}^2$ (question c)) ?

a) $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

c) $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Sol.:

a) *On cherche une combinaison linéaire des vecteurs telle que*

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ce qui conduit au système

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}.$$

Ce système possède une unique solution triviale $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, donc les vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ et $\vec{v}_3$ sont linéairement indépendants, et ils engendrent $\mathbb{R}^3$.

b) *$\vec{v}_1, \vec{v}_2$ et $\vec{v}_3$ ne sont pas linéairement indépendants. En effet, $\vec{v}_1 = -\vec{v}_2$. Ainsi ces trois vecteurs n'engendrent pas $\mathbb{R}^3$.*

c) *$\vec{v}_1, \vec{v}_2$ et $\vec{v}_3$ ne sont pas linéairement indépendants, car ils sont de taille 2 strictement inférieure au nombre 3 de vecteurs. Cependant, ces vecteurs sont linéairement indépendants deux à deux, donc ils engendrent $\mathbb{R}^2$.*

Remarque

On utilise :

Les colonnes de A engendrent $\mathbb{R}^m$.

$\Leftrightarrow$ *Pour tout vecteur $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$, l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ a une solution $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ (tout vecteur $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ peut s'exprimer comme combinaison linéaire des colonnes de A).*

$\Leftrightarrow$ *La matrice augmentée n'a pas de ligne de la forme $\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & c \end{bmatrix}$ avec c non nul (car le système est compatible) ; la forme échelonnée de A n'a pas de ligne nulle $\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ (car $A\vec{x} = \vec{b}$ a une solution pour tout $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$).*

$\Leftrightarrow$ *Chaque ligne a une position pivot.*

Exercice 9 (Preuve : (In)dépendance linéaire)

L'assertion suivante est-elle correcte (justifier) ?

Tout ensemble de vecteurs $\{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_p\}$ de $\mathbb{R}^n$ est linéairement dépendant si $p > n$.

Sol.:

L'assertion est correcte.

Théorème : si un ensemble $S = \{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_p\}$ contient plus de vecteurs que chaque vecteur n'a de composantes, alors S est linéairement dépendant.

Justification : lorsque $p = n$, les vecteurs sont soit déjà linéairement dépendants, soit linéairement indépendants et ils engendrent alors $\mathbb{R}^n$. Ce dernier cas signifie que tout vecteur (en particulier un nouveau vecteur que l'on ajoute à l'ensemble S) peut s'exprimer comme combinaison linéaire des autres.

Exercice 10 (Solution)

Soit $a \in \mathbb{R}$. A l'aide de l'algorithme de réduction (ou de Gauss-Jordan), déterminer les valeurs du paramètre a pour lesquelles le système

$$\begin{cases} ax + (1-a)y + (1-a)z & = a^2 \\ ax + (1+a)y + (1+a)z & = a - a^2 \\ x + y + z & = 1 - a \end{cases}$$

a) n'admet aucune solution,

b) admet une infinité de solutions,

c) admet une solution unique.

Ensuite résoudre le système dans les cas b) et c).

Sol.: *On écrit la matrice augmentée du système, en échangeant la première et la dernière ligne*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1-a \\ a & 1-a & 1-a & a^2 \\ a & 1+a & 1+a & a-a^2 \end{array}\right) \underset{L3 \to L3 - aL1}{\overset{L2 \to L2 - a \cdot L1}{\widetilde{\quad}}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1-a \\ 0 & 1-2a & 1-2a & 2a^2-a \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \widetilde{L2 \leftrightarrow L3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1-a \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1-2a & 1-2a & 2a^2-a \end{array}\right) \widetilde{L1 \to L1 - L2 \, L3 \to L3 - (1-2a)L2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1-a \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2a^2-a \end{array}\right)$$

La matrice est maintenant échelonnée et réduite. On distingue les cas :

- *Si $a \neq 0$ et $a \neq 1/2$, le nombre $2a^2 - a$ est non nul. La dernière équation ne peut être vérifiée et le système ne possède pas de solutions. On écrit alors $S = \emptyset$ pour dire que l'ensemble des solutions est vide.*

- *Si $a = 0$ ou $a = 1/2$, la dernière équation donne $0 = 0$. Il reste alors deux équations à trois inconnues. On a ainsi une infinité de solutions paramètrées par $z \in \mathbb{R}$. On a toujours $x = 1 - a$ et $y = -z$. On choisit z comme inconnue libre, c'est-à-dire comme paramètre et on obtient :*

  $$S = \{(1-a; -z; z) \mid z \in \mathbb{R}\}$$

  Le système possède une droite entière de solutions.

Exercice 11 (Algorithme de Gauss-Jordan et solutions)

Écrire les solutions des systèmes $A\vec{x} = \vec{b}$ suivants sous la forme $\vec{x} = \vec{p} + \vec{v}$, où $\vec{p}$ est une solution particulière du système, et $\vec{v}$ est la solution générale du système homogène $A\vec{x} = \vec{0}$.

a) $\left\{\begin{array}{rcrcrl} x_1 & + & 3x_2 & - & 5x_3 = & 4 \\ x_1 & + & 4x_2 & - & 8x_3 = & 7 \\ -3x_1 & - & 7x_2 & + & 9x_3 = & -6 \end{array}\right.$

b) $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & = & 1 \end{array}\right.$

Sol.:

a) Forme échelonnée réduite de la matrice augmentée :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solution générale :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Forme échelonnée réduite de la matrice augmentée :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le système est incompatible. Pas de solution !

Exercice 12 (Vrai - faux)

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

V F

a) En appliquant différentes opérations (licites) sur les lignes d'une matrice, on obtient des formes échelonnées réduites différentes. ☐ ☐

b) Une variable de base d'un système linéaire est une variable qui correspond à un pivot dans une colonne. ☐ ☐

c) La dernière colonne d'une matrice augmentée peut faire office de colonne pivot. ☐ ☐

d) Un système n'est compatible que lorsque chaque colonne contient un pivot. ☐ ☐

Sol.: *Vrai : b). Faux : a), d). L'affirmation c) est vraie (selon la définition vue en classe), le système est alors incompatible.*

Exercice 13 (QCM)

Soit

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ h \end{pmatrix}$$

- ☐ L'ensemble $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ est linéairement indépendant pour $h = -2$.
- ☐ Le vecteur $\mathbf{v}_2$ dépend linéairement des vecteurs $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_3$ pour $h \neq 2$.
- ☐ L'ensemble $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ est linéairement indépendant pour $h \neq -2$.
- ☐ Le vecteur $\mathbf{v}_3$ dépend linéairement des vecteurs $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ pour $h = 2$.

Sol.: *La seule bonne réponse est la deuxième. On a*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} \sim^{L_2-3L_1}_{L_3+2L_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & h+2 \end{bmatrix}$$

La deuxième ligne montre que quelque soit la valeur de h, le système $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_3$ est inconsistant et donc $\mathbf{v}_3$ ne peut pas se trouver dans Vect$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$. En fait, on voit que $\mathbf{v}_2$ est un multiple de $\mathbf{v}_1$. La famille $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ est donc linéairement dépendante. A fortiori *la famille $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ est aussi linéairement dépendante ! Cette observation élimine les réponses 1 et 3.*

Quelle que soit la valeur de h, les vecteurs $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ et $\mathbf{v}_3$ sont linéairement dépendants car il n'y a pas un pivot dans chacune des colonnes de la matrice augmentée.

Exercice 14 (QCM)

Soit Vect$\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}, \vec{v_4}\}$ avec

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v_4} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Laquelles des informations suivantes est correcte ?

- ☐ Le Vect ne contient aucun vecteur de $\mathbb{R}^4$.
- ☐ Le Vect contient tous les vecteurs de $\mathbb{R}^4$.
- ☐ Le vecteur $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ est dans le Vect.
- ☐ Le Vect contient une infinité de vecteurs de $\mathbb{R}^4$.

Sol.: *Comme la troisième composante des quatre vecteurs est nulle, tous les vecteurs de la forme $\begin{pmatrix} * \\ * \\ a \\ * \end{pmatrix}$ avec $a \neq 0$, ne seront pas dans le* Vect. *Donc le* Vect *ne peut pas contenir le vecteur $\vec{b}$ ainsi que tous les vecteurs de $\mathbb{R}^4$. Comme $\vec{v_1}$ (ou $\vec{v_2}$, ...) est dans le* Vect, *le* Vect *contient un vecteur de $\mathbb{R}^4$. Vu qu'il contient au moins un vecteurs de $\mathbb{R}^4$, il contient toutes les combinaisons linéaires de celui-ci, et donc une infinité de vecteurs de $\mathbb{R}^4$.*

Remarque *: le* Vect *de n'importe quelle liste de vecteurs non-nuls contient toujours une infinité de vecteurs.*