Série 2 (Corrigé)

Exercice 1 (Systèmes linéaires)

i) Écrire les matrices augmentées correspondant aux systèmes linéaires suivants.

ii) Résoudre ces systèmes linéaires en utilisant des opérations élémentaires sur les lignes de ces matrices augmentées.

a) $$\left\{\begin{array}{rcrcr} x_1 & - & 2x_2 & = & -1 \\ -x_1 & + & 3x_2 & = & 3 \end{array}\right.$$

b) $$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 12 \\ x_3 & + & 2x_1 & - & 4x_2 & = & -1 \\ x_2 & + & 2x_3 & - & 4x_1 & = & -8 \end{array}\right.$$

c) $$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 6x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 11 \\ -3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & -4 \\ 5x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 9 \end{array}\right.$$

d) $$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & 3x_2 & & & = & 5 \\ 5x_3 & - & x_1 & + & x_2 & = & 2 \\ x_2 & + & x_3 & & & = & 0 \end{array}\right.$$

Sol.:

a) Matrice augmentée : $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$,

Forme échelonnée réduite : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, *Solution :* $x_1 = 3$, $x_2 = 2$.

b) Matrice augmentée : $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 12 \\ 2 & -4 & 1 & -1 \\ -4 & 1 & 2 & -8 \end{pmatrix}$,

Forme échelonnée réduite : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, *Solution :* $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$.

c) Matrice augmentée : $\begin{pmatrix} 6 & -3 & 2 & 11 \\ -3 & 2 & -1 & -4 \\ 5 & -3 & 2 & 9 \end{pmatrix}$,

Forme échelonnée réduite : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, *Solution :* $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$.

d) Matrice augmentée : $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

Forme échelonnée réduite : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, *Solution :* $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$.

Exercice 2 (Matrice et solutions)

a) Vérifier si les matrices suivantes sont sous forme échelonnée ou sous forme échelonnée réduite.
b) Identifier les variables de bases (ou principales) et les variables libres.
c) Déterminer si les systèmes linéaires correspondant possèdent exactement une solution, une infinité de solutions, ou bien aucune.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sol.:

A) forme échelonnée, forme échelonnée réduite. Variables principales : x_1, x_2, x_3. Variables libres : aucune. Solution unique.
B) forme échelonnée, forme échelonnée réduite. Variables principales : x_1, x_2. Variable libre : x_3. Infinité de solutions.
C) forme échelonnée, forme échelonnée réduite. Variables principales : x_1, x_2. Variable libre : x_3. Pas de solution.
D) forme échelonnée, pas une forme échelonnée réduite. Variables principales : x_2, x_3. Variable libre : x_1. Infinité de solutions.
E) pas une forme échelonnée. Infinité de solutions.

Exercice 3 (Matrices échelonnées, échelonnées-réduites)

a) Mettre les matrices suivantes sous forme échelonnée puis sous forme échelonnée réduite.
b) Supposons que ces matrices sont des matrices augmentées de systèmes linéaires. Déterminer dans chaque cas si le système linéaire possède exactement une solution, une infinité de solutions, ou bien aucune.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

Sol.: *A :* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, *infinité de solutions (x_3 est une variable libre),*

B : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, *pas de solution,*

C : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *pas de solution.*

Exercice 4 (Matrices échelonnées-réduites)

Déterminer toutes les valeurs possibles des nombres a, b, c, d et e pour lesquelles la matrice suivante est sous forme échelonnée-réduite :

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & c & 1 & d & 3 \\ 0 & e & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sol.: *La matrice suivante (sans lui effectuer des opérations élémentaires) est sous la forme échelonnée réduite si*

$$e = 0, \quad c = 1, \quad b = 0 \quad d = 0$$

Exercice 5 (Opérations élémentaires)

Les opérations suivantes sont-elles valides ?

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 - L_2 \\ L_2 - L_1 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot 0 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_1 - L_2 \\ L_1 - L_3 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sol.:

a) Non, on perd de l'information en faisant deux opérations simultanées sur les lignes.

b) Non. L'information sur x_2 est perdue en multipliant par zéro.

c) Oui. Aucune information n'est perdue en soustrayant une ligne sur une autre (deux fois successivement).

Exercice 6 (Algorithme de Gauss-Jordan)

Déterminer les valeurs des nombres réels a et b pour que le système $\begin{cases} x + 2y = a \\ 4x + by = 12 \end{cases}$

a) ne possède pas de solution,

b) possède une solution unique,

c) possède une infinité de solutions.

Sol.:

Si $b = 8$: alors le système admet une infinité de solutions dans le cas où $a = 3$. Si $a \neq 3$ alors le système est indéterminé. Car la deuxième ligne sera $(0 \quad 0 \mid 12 - 4a)$.

Si $b \neq 8$: alors le système admet deux pivots, et donc il y aura une unique solution pour chaqu valeur de a.

Exercice 7 (Systèmes homogènes)

Déterminer si les systèmes linéaires homogènes suivants ont une solution non triviale.

$$\text{a)} \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & - & 5x_2 + & 8x_3 & = & 0 \\ -2x_1 & - & 7x_2 + & x_3 & = & 0 \\ 4x_1 & + & 2x_2 + & 7x_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\text{b)} \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & 3x_2 & + & 7x_3 & = & 0 \\ -2x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 9x_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\text{c)} \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -7x_1 & + & 37x_2 & + & 119x_3 & = & 0 \\ 5x_1 & + & 19x_2 & + & 57x_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

Sol.:

a) La matrice des coefficients est carrée (autant d'équations que d'inconnues) et on peut remarquer que $L_1 = L_2 + L_3$. Il s'agit d'une relation de dépendance linéaire sur les lignes. On obtiendra une ligne de zéros dans la matrice, et il n'y aura pas trois pivots. On a alors au moins une variable libre et donc une infinité de solutions (non-triviales).

On peut aussi résoudre le système. La forme échelonnée réduite de la matrice augmentée est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{17}{8} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sa solution générale est

$$\left\{ \begin{array}{rcr} x_1 & = & -\frac{17}{8}x_3 \\ x_2 & = & \frac{3}{4}x_3 \end{array} \right. .$$

Il existe une infinité de solutions non triviales (prendre $x_3 \neq 0$).

b) Forme échelonnée réduite de la matrice augmentée :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solution triviale ($x_1 = x_2 = x_3 = 0$).

c) Le système a moins d'équations (deux) que d'inconnues (trois), il ne peut pas y avoir trois pivots. Le système est compatible (on échelonne pour le voir), donc il existe une infinité de solutions.

Exercice 8 (Systèmes linéaires)

Pour chacun des systèmes suivants

1. $\begin{cases} x+y+2z+3w &= 13 \\ x-2y+z+w &= 8 \\ 3x+y+z-w &= 1 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 2x+y+z-2w &= 1 \\ 3x-2y+z-6w &= -2 \\ x+y-z-w &= -1 \\ 6x+z-9w &= -2 \\ 5x-y+2z-8w &= 3 \end{cases}$

a) Écrire la matrice augmentée correspondante (pour l'ordre des inconnues x, y, z, w).
b) Mettre cette matrice sous forme échelonnée réduite.
c) Déterminer la solution générale du système.

Sol.: *Les matrices augmentées sont*

$$1) \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 13 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 8 \\ 3 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad 2) \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & -6 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 6 & 0 & 1 & -9 & -2 \\ 5 & -1 & 2 & -8 & 3 \end{bmatrix}$$

et les matrices sous forme échelonnée réduite correspondantes sont

$$1) \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 8 \end{bmatrix} \qquad 2) \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -17/11 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 9/11 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3/11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pour le premier système, w est une variable libre et la solution est donnée par : $x = -2+w$, $y = -1$ et $z = 8 - 2w$. Sous forme vectorielle on écrira donc

$$S = \{ \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid w \in \mathbb{R} \}$$

C'est une droite dans $\mathbb{R}^4$. Le deuxième système n'est pas consistant et donc n'admet pas de solution.

Exercice 9 (Combinaisons linéaires)

Considérons les vecteurs $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -13 \\ -3 \end{pmatrix}$, et $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Est-il possible d'écrire $\vec{b}$ comme combinaison linéaire de $\vec{a}_1$ et $\vec{a}_2$?
b) Donner une interprétation géométrique du résultat.

Sol.:

a) Non. Considérons l'équation linéaire $x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 = \vec{b}$, d'inconnues x_1, x_2. Le système linéaire correspondant est

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 &= -3 \\ -2x_1 - 13x_2 &= 8 \\ 3x_1 - 3x_2 &= 1 \end{cases}$$

avec pour matrice augmentée

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ -2 & -13 & 8 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

et pour forme échelonnée réduite

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On peut voir que ce système ne possède pas de solution.

b) Cela signifie que le vecteur $\vec{b}$ n'appartient pas au plan formé des vecteurs $x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2$, avec x_1 et x_2 réels.

Exercice 10 (Système compatible)

Soit

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$$

Montrer que l'équation $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ n'est pas compatible pour tout vecteur $\overrightarrow{b}$ de $\mathbb{R}^2$. Trouver et décrire l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{b}$ pour lesquels $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ est compatible.

Sol.: *Puisque la deuxième ligne de la matrice A vaut -2 fois la première, il faut et il suffit que le deuxième coefficient de $\overrightarrow{b}$ vérifie aussi cette propriété : $b_2 = -2b_1$. Ainsi pour $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ le système n'a pas de solution.*

Exercice 11 (Système incompatible)

Montrer que le système d'équations linéaires suivant n'a pas de solution :

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x - 2y - z - u = 3 \\ x + 3y + 2z + u = 5 \\ 3x + 4y + 3z + 3u = 7 \end{cases}$$

Sol.: *Le calcul nous donne*

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 3 & 3 & 7 \end{array}\right) \underset{}{\widetilde{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 3 & 3 & 7 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\widetilde{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & -3 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 3 & 4 & 3 & 3 & 7 \end{array}\right)$$

Comme $7 \neq 0$, le système n'a pas de solution.

Exercice 12 (QCM)

Le système linéaire

$$\left\{\begin{array}{rr} x - 2y - 3z - 3u = & -1 \\ 2x + 4y + 2z + 2u = & 6 \\ -9x + 4y - 3z + 5u = & 3 \\ 3x - 8y + 5z - 3u = & -13 \end{array}\right.$$

- ☐ possède une solution unique
- ☐ a une droite comme solution
- ☐ a un plan comme solution
- ☐ ne possède aucune solution

Sol.: *a une droite comme solution*

Exercice 13 (Vrai-Faux)

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

		V	F
a)	Des opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice augmentée ne changent jamais l'ensemble des solutions du système linéaire associé.	☐	☐
b)	Un système incompatible a plus d'une solution.	☐	☐

Sol.: *Vrai : a)Faux : b)*

Exercice 14 (Vrai-Faux)

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

		V	F
a)	Si une forme échelonnée d'une matrice augmentée possède $[0\ 0\ 0\ 0\ 5]$ comme ligne, alors le système est incompatible.	☐	☐
b)	Il existe plusieurs formes échelonnées d'une matrice augmentée.	☐	☐
c)	À chaque fois que l'on a une variable libre dans un système linéaire, le système possède une infinité de solutions.	☐	☐
d)	Une solution générale d'un système est une description explicite de toutes les solutions du système.	☐	☐

Sol.: *Vrai : a), b), d). Faux : c).*