Série 8 (Corrigé)

Exercice 1 (Sous-espace vectoriel)

Trouver la dimension du sous-espace H défini par :

$$H = \{ \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^4 \mid \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} a-3b+6c \\ 5a+4d \\ b-2c-d \\ 5d \end{pmatrix},\ \text{où } a,b,c,d \in \mathbb{R} \}$$

Sol.: *Par construction, H est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$ défini comme Vect$\{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3, \overrightarrow{v}_4\}$ avec*

$$\overrightarrow{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{v}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{v}_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \textit{et} \quad \overrightarrow{v}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

On voit que $\overrightarrow{v}_3 = -2\overrightarrow{v}_2$, ce qui est équivalent à dire que $H =$ Vect$\{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_4\}$. En vérifiant que ces trois vecteurs sont linéairement indépendants (en calculant la forme échelonnée de la matrice dont les colonnes sont $\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_4$ par exemple), on peut déduire que H est de dimension 3.

Exercice 2 (Axiomes)

Soit V un espace vectoriel muni des opérations d'addition et de multiplication par un scalaire. En n'utilisant QUE les 10 axiomes d'un espace vectoriel, montrer les propriétés suivantes. Notons l'élément nul de V avec 0_V, afin de le distinguer de 0.

a) L'élément inverse de $v \in V$ est unique.

b) $0v = 0_V$ et $0_V = -0_V$.

c) $\alpha 0_V = 0_V$.

d) $(-1)v = -v$.

Sol.:

a) *L'élément inverse de $v \in V$ est unique. Supposons que pour $v \in V$, il existe un autre inverse dans V, noté w. Par définition de l'inverse (axiome 5)) $v + w = 0_V$. Ainsi*

$$(-v) \overset{4)}{=} (-v) + 0_V \overset{v+w=0_V}{=} (-v) + (v+w) \overset{3)}{=} ((-v)+v) + w \overset{5)}{=} (0_V) + w \overset{2),4)}{=} w.$$

b) $0v = 0_V$ *et* $0_v = -0_V$. *On a que* $0 = 0 + 0$, *ainsi*

$$0v = (0+0)v \overset{8)}{=} 0v + 0v$$

Comme $0v \in V$, *il existe un inverse noté* $-0v$ *et*

$$\begin{aligned} 0v + (-0v) &= 0v + 0v + (-0v) \\ 0_V &= 0v + 0_V \quad \textit{par 5)} \\ 0_V &= 0v \qquad\quad\; \textit{par 4)} \end{aligned}$$

De plus par 4) on a

$$0_V + 0_V = 0_V$$

Or ceci est l'axiome 5) où $v = 0_V$. *Ainsi* $0_V = -0_V$.

c) $\alpha 0_V = 0_V$. *On a*

$$\alpha 0_V = \alpha(0_V + 0_V).$$

En procédant comme au point précédant, on a que $0_V = \alpha 0_V$.

d) $(-1)v = -v$. *On a*

$$v + (-1)v \overset{10)}{=} 1v + (-1)v \overset{8)}{=} (1 + (-1))v = 0v \overset{Point b)}{=} 0_V.$$

Donc $(-1)v$ *est un inverse de* v. *Or par le point a), l'inverse est unique, donc* $(-1)v = -v$.

Exercice 3 (Sous-espace vectoriel)

Soient V et W deux espaces vectoriels, et $T : V \to W$ une transformation linéaire. Montrer que si $U \subset V$ est un sous-espace vectoriel, alors l'ensemble image $T(U)$ est un sous-espace vectoriel de W.

Sol.: *On doit prouver (i) si* $w \in T(U)$ *et* α *est un scalaire, alors* $\alpha w \in T(U)$ *et (ii) si* $w_1 \in T(U)$ *et* $w_2 \in T(U)$ *alors* $w_1 + w_2 \in T(U)$, *et (iii)* $T(U)$ *contient* 0_W.

(i) En effet : $w \in T(U) \Leftrightarrow w = T(u)$ *pour un certain* $u \in U$. *Ainsi, en utilisant la linéarité de* T, $\alpha w = \alpha T(u) = T(\alpha u) \in T(U)$ *(*$\alpha u \in U$ *car* U *est un s.e.v. de* V, *donc fermé pour la multiplication par un scalaire). (ii) De même,* $w_1 + w_2 = T(u_1) + T(u_2) = T(u_1 + u_2) \in T(U)$ *(*U *est fermé pour l'addition). (iii) On a* $0_V \in U$ *car* U *s.e.v. de* V *et* $T(0_V) = 0_W$ *par linéarité de* T, *donc* $0_W \in T(U)$ *(car il existe* $u = 0_V \in U$ *tel que* $0_W = T(u)$*).*

Exercice 4 (Base)

On rappelle que $\mathbb{P}_3$ est l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3.

a) Les vecteurs de $\mathbb{P}_3$ suivants sont-ils linéairement indépendants ?

(i) p_1, p_2, p_3 tels que $p_1(t) = 1 - t^2$, $p_2(t) = t^2$, $p_3(t) = t$, $t \in \mathbb{R}$.

(ii) p_1, p_2, p_3 tels que $p_1(t) = 1 + t + t^2$, $p_2(t) = t + t^2$, $p_3(t) = t^2$, $t \in \mathbb{R}$.

b) Les vecteurs p_1, p_2, p_3 de (ii) forment-ils une base de $\mathbb{P}_3$?

Sol.:

a) *i) Oui. En effet,*

$x_1p_1(t)+x_2p_2(t)+x_3p_3(t) = x_1(1-t^2)+x_2t^2+x_3t = t^2(x_2-x_1)+x_3t+x_1 = 0$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$ *ssi*

$$\begin{cases} x_2 - x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_1 = 0, \end{cases}$$

i.e. $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

ii) Oui

b) Non, aucun des trois vecteurs ne permet d'engendrer un polynôme de degré égal à 3. *Par exemple* t^3 *n'est pas une combinaison linéaire de* p_1, p_2 *et* p_3*. Plus tard on verra que* $\dim(\mathbb{P}_3) = 4$ *et il y a seulement trois vecteurs, donc ça ne peut pas être une base.*

Exercice 5 (Indépendance linéaire)

On rappelle que $C^0([0,1])$ est l'espace vectoriel des fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continues.

a) Soit $f, g \in C^0([0,1])$ définie par $f(t) = \sin t$ et $g(t) = \cos t$. La famille $\{f, g\}$ est-elle libre ou liée ?

b) Même question pour $\{f, g, h\}$ où $f(t) = \sin t$, $g(t) = \sin t \cos t$, et $h(t) = \sin 2t$.

c) Pour les applications $T : C^0([0,1]) \to \mathbb{R}$ suivantes, déterminer celles qui sont linéaires. Pour celles qui ne le sont pas, trouver un contre exemple.

1) $T_1(f) := \int_0^1 f(t)\, dt$

2) $T_2(f) := \max_{t\in[0,1]} f(t)$

3) $T_3(f) := f(1/2)$.

Sol.:

a) La famille est libre car si c_1, c_2 *sont des scalaires tels que* $c_1 \sin t + c_2 \cos t = 0$ *pour tout* $t \in [0,1]$*, alors en prenant* $t = 0$ *puis* $t = \pi/6$*, on obtient* $c_2 = 0$ *(car* $\sin 0 = 0$ *et* $\cos 0 = 1$*) puis* $c_1 = 0$ *(car* $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$*).*

b) La famille est liée car il existe une combinaison linéaire non triviale, $\sin 2t - 2\sin t \cos t = 0$ *pour tout* $t \in [0,1]$.

c) T_1 *est linéaire (voir cours d'analyse).* T_2 *n'est pas linéaire. On peut prendre par exemple* $f(t) = t$*, et* $g(t) = 1 - t$*. Observer que* $(f+g)(t) = 1$*, ainsi*

$$\max_{t\in[0,1]} f(t) = 1 = \max_{t\in[0,1]} g(t) = \max_{t\in[0,1]} (f+g)(t).$$

En d'autre terme, $T(f) + T(g) = 2 \neq 1 = T(h)$*. Finalement,* T_3 *est linéaire.*

Exercice 6 (Ker(A), Im(A))

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Trouver une base de $\mathrm{Ker}(A)$ et de $\mathrm{Im}(A)$.

Sol.: *On note $A = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4)$, avec $(\vec{v}_i)_{1\leqslant i\leqslant 4}$ colonnes de A. Les vecteurs $\vec{v}_2$ et $\vec{v}_3$ sont proportionnels à $\vec{v}_1$, donc ils sont superflus pour trouver une base de* $\mathrm{Im}(A)$. *Les vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_4$ sont linéairement indépendants, ils constituent une base de* $\mathrm{Im}(A)$.

L'espace $\mathrm{Ker}(A)$ *est constitué des vecteurs* $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ *tels que $A\vec{x} = \vec{0}$. On a*

$$A\vec{x} = x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + x_3\vec{v}_3 + x_4\vec{v}_4 = (x_1 + 2x_2 + 3x_3)\vec{v}_1 + x_4\vec{v}_4,$$

ainsi $A\vec{x} = \vec{0}$ ssi $x_4 = 0$ et $x_1 = -2x_2 - 3x_3$. Par conséquent, x_2 et x_3 sont des variables libres du système linéaire $A\vec{x} = \vec{0}$. On obtient une base de $\mathrm{Ker}(A)$ *en choisissant successivement $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, puis $x_2 = 0$, $x_3 = 1$:*

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Exercice 7 (Indépendance linéaire)

Soit $M_{2\times 2}$ l'espace vectoriel des matrices de taille 2×2.

a) Montrer que les matrices A, B et C données par $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont linéairement indépendantes.

b) Trouver a, b, c, d tels que pour $D = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, les matrices A, B, C, D forment une base de $M_{2\times 2}$.

Sol.:

a) $\alpha_1 A + \alpha_2 B + \alpha_3 C = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 & \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ \alpha_2 & \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.$

b) On vient en fait de calculer au (i) que $\mathrm{Vect}\,\{A, B, C\}$ *est l'ensemble des matrices de la forme*

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 & \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ \alpha_2 & \alpha_1 \end{pmatrix}.$$

Comme ce sous-espace est de dimension 3, pour obtenir une base de $M_{2\times 2}$ qui est de dimension 4, *il suffit de trouver une matrice D qui n'est pas dans ce sous-espace,*

c-à-d pas de la forme ci-dessus. Il suffit donc de proposer une matrice $D = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *telle que* $a \neq c + d$. *On peut donc proposer par exemple* $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$, $d = 0$.
Méthode alternative :

$$\alpha_1 A + \alpha_2 B + \alpha_3 C + \alpha_4 D = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 + a\alpha_4 & \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + b\alpha_4 \\ \alpha_2 + c\alpha_4 & \alpha_1 + d\alpha_4 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \alpha_1 + \alpha_2 + a\alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + b\alpha_4 = 0 \\ \alpha_2 + c\alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 + d\alpha_4 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & 0 & c \\ 1 & 0 & 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = 0.$$

Observons que

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & 0 & c \\ 1 & 0 & 0 & d \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow a - c - d = 0.$$

Ainsi, A, B, C, D forment une base de $M_{2\times 2} \Leftrightarrow a - c - d \neq 0$.

Exercice 8 (Ker(A), Im(A))

Soit $\mathbb{P}_2$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2, dont on admet que c'est un espace vectoriel. On considère la transformation $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $T(p) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(0) \end{pmatrix}$.

a) Vérifier que T est linéaire.

b) Trouver une base de $\operatorname{Ker} T$.

c) Trouver une base de $\operatorname{Im} T$.

Sol.:

a) Pour tous $p_1, p_2, p \in \mathbb{P}_2$ *et* $c \in \mathbb{R}$, *on a :*

$$T(p_1 + p_2) = \begin{pmatrix} p_1(0) + p_2(0) \\ p_1(0) + p_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1(0) \\ p_1(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_2(0) \\ p_2(0) \end{pmatrix} = T(p_1) + T(p_2).$$

$$T(cp) = \begin{pmatrix} cp(0) \\ cp(0) \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} p(0) \\ p(0) \end{pmatrix} = cT(p).$$

b) $T(p) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} p(0) \\ p(0) \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow p(0) = 0$. *Considérons un polynôme* $p \in \mathbb{P}_2$ *de la forme* $p(t) = c_2 t^2 + c_1 t + c_0$. *On a* $p(0) = 0 \Leftrightarrow c_0 = 0 \Leftrightarrow p(t) = c_2 t^2 + c_1 t$. *Ainsi, une base de* $\operatorname{Ker} T$ *est* $\{t, t^2\}$.

c) Soit p *de la forme* $p(t) = c_2 t^2 + c_1 t + c_0$. *L'image* $\operatorname{Im} T$ *est l'ensemble des vecteurs* $T(p) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = c_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. *Ainsi, une base de* $\operatorname{Im} T$ *est le vecteur* $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 9 (Coordonnées)

a) On considère le vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ exprimé dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Trouver les coordonnées $[\vec{v}]_{\mathcal{B}}$ de $\vec{v}$ dans la base $\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ de $\mathbb{R}^2$, où $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Même question pour $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ donné dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à exprimer dans la base $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ donnée par

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sol.:

a) Les coordonnées $[\vec{v}]_{\mathcal{B}}$ de $\vec{v}$ dans la base $\mathcal{B}$ sont (c_1, c_2) et satisfont l'équation vectorielle $c_1\vec{b}_1 + c_2\vec{b}_2 = \vec{v}$. Sous forme matricielle, l'équation devient

$$\left(\vec{b}_1 \ \vec{b}_2 \right) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad P_{\mathcal{B}} \, [\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \vec{v} = [\vec{v}]_{\mathcal{E}} \,,$$

où $P_{\mathcal{B}}$ est la matrice de changement de base (de la base $\mathcal{B}$ à la base canonique $\mathcal{E}$). Ainsi

$$[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}}^{-1}\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ainsi $\vec{v} = 2\vec{b}_1 - 1\vec{b}_1$.

b) A nouveau, on cherche le vecteur de coordonnées $[\vec{v}]_{\mathcal{B}}$ de $\vec{v}$ dans la base $\mathcal{B}$. Il satisfait l'équation matricielle

$$P_{\mathcal{B}} \, [\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \vec{v}, \qquad \textit{pour} \quad P_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Un moyen serait de trouver $P_{\mathcal{B}}^{-1}$ et on aurait

$$[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}}^{-1}\vec{v}.$$

Un moyen plus rapide est de considérer la matrice augmentée suivante et de la réduire.

$$(P_{\mathcal{B}}|\vec{v}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) = (I_3| \, [\vec{v}]_{\mathcal{B}}) \,.$$

Ainsi $\vec{v} = -1\vec{b}_1 + 3\vec{b}_1 + 2\vec{b}_3$.

Exercice 10 (Sous-espaces vectoriels)

Soit V un espace vectoriel et U, W des sous-espaces de V.

a) Montrer que l'intersection $U \cap W$ est encore un sous-espace de V.

b) Montrer qu'en général la réunion $U \cup W$ n'est pas un sous-espace de V (donner un contre-exemple explicite, par exemple dans l'espace vectoriel $V = \mathbb{R}^2$).

c) On pose $U + W = \{u + w \,|\, u \in U, w \in W\}$. Autrement dit $U + W$ est constitué de tous les vecteurs qui sont sommes d'un vecteur de U et d'un vecteur de W. Montrer que $U + W$ est un sous-espace de V.

d) Dans $\mathbb{R}^3$ on considère les vecteurs $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et on définit les sous-espaces $U = \text{Vect}\{\overrightarrow{u}\}$ et $W = \text{Vect}\{\overrightarrow{w}\}$. Décrire $U \cup W$ et $U + W$.

Remarque. En fait $U + W$ est le plus petit sous-espace qui contient $U \cup W$.

Sol.: *Soit V un espace vectoriel et U, W des sous-espaces de V.*

a) Le vecteur nul se trouvant dans U et dans W il se trouve également dans l'intersection $U \cap W$. On vérifie ensuite la stabilité de la somme : Soient u et v des vecteurs de $U \cap W$, alors $u + v$ est un vecteur de U car $u, v \in U$ et U est un sous-espace de W ; de même $u + v$ est un vecteur de W et par conséquent $u + v \in U \cap W$. Pour terminer la stabilité de l'action se démontre de la même façon. Soit u un vecteur de $U \cap W$ et λ un nombre réel. Alors λu se trouve dans U car U est un sous-espace et λu se trouve dans W pour la même raison. On conclut que λu appartient à $U \cap W$.

b) Un exemple explicite est donné au point 4. En général on se rend bien compte que la réunion de deux droites dans le plan n'est pas un sous-espace du plan car la somme n'est pas stable.

c) Le vecteur nul appartient à la somme $U + W$ car $0 = 0 + 0 \in U + W$. On montre maintenant que $U + W$ est stable pour la somme. Soient $a = u + w$ et $a' = u' + w'$ deux vecteurs de $U + W$. Alors

$$a + a' = (u + w) + (u' + w') = (u + u') + (w + w')$$

par commutativité et associativité de la somme de vecteurs dans V. Cette écriture montre que $a + a' \in U + W$. Pour l'action on montre que λa appartient $U + W$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\lambda a = \lambda(u + w) = \lambda u + \lambda w$$

Comme $\lambda u \in U$ et $\lambda w \in W$, on a terminé la preuve.

d) La réunion $U \cup W$ est l'union de deux droites sécantes passant par l'origine, alors que la somme $U + W$ est un plan. Il s'agit ici du plan horizontal Oxy, voir aussi l'exercice 2.

Exercice 11 (Im(A), Ker(A))

Soient
$$\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5/2 \\ -3 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix}.$$
Déterminer si $\overrightarrow{w}$ est dans ImA, dans Ker$A$ ou bien dans les deux.

Sol.: *Le vecteur $\overrightarrow{w}$ est dans KerA car on calcule $A\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$.*

Le vecteur $\overrightarrow{w}$ est aussi dans ImA car le système $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{w}$ est compatible (il suffit d'examiner la forme échelonnée réduite de sa matrice augmentée). Ainsi, il existe au moins un vecteur, par exemple $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, tel que $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{w}$.

Exercice 12 (VF)

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

V F

a) Le système d'équations linéaires homogène représenté par la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ est compatible. ☐ ☐

b) Le système d'équations linéaires inhomogène représenté par la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ est compatible. ☐ ☐

c) Si la matrice des coefficients d'un système de quatre équations à quatre inconnues a un pivot dans chaque colonne, alors le système est compatible. ☐ ☐

d) Si la matrice des coefficients d'un système de quatre équations à quatre inconnues a un pivot dans chaque ligne, alors le système est compatible. ☐ ☐

e) Si la matrice augmentée d'un système de quatre équations à quatre inconnues a un pivot dans chaque ligne, alors le système est compatible. ☐ ☐

f) Si la matrice augmentée d'un système de quatre équations à quatre inconnues a un pivot dans chaque colonne, alors le système est compatible. ☐ ☐

Sol.:

a) Un système d'équations linéaires homogène est toujours compatible ! La matrice a beau avoir un pivot dans la dernière colonne, il ne s'agit pas ici d'un pivot dans la colonne des termes inhomogènes. Ceux-ci sont tous nuls et on ne les écrit pas.

b) La ligne $(0\ 0\ 0\ 7)$ *montre que le système d'équations linéaires inhomogène est incompatible.*

c) C'est vrai. Un pivot dans chacune des quatre colonnes implique l'existence d'un pivot dans chaque ligne. On conclut alors par un résultat du cours.

d) C'est vrai et c'est dit ainsi dans le cours.

e) C'est faux. Il suffit que la dernière ligne soit de la forme $(0\ 0\ 0\ 0\ 7)$ *par exemple pour que le système soit incompatible.*

f) Si la matrice augmentée d'un système de quatre équations à quatre inconnues est constituée de cinq colonnes, celles des inconnues et celle des termes inhomogènes. Il n'est donc pas possible qu'il y ait un pivot dans chaque colonne.

Exercice 13 (VF)

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

	V	F
a) Si deux lignes d'une matrice de taille 7×7 sont les mêmes, alors $\det A = 0$.	☐	☐
b) Si A est une matrice carrée dont le déterminant vaut 2, alors $\det(A^3) = 6$.	☐	☐
c) Si A et B sont des matrices de taille $n \times n$ telles que $\det A = 2$ et $\det B = 5$, alors $\det(A + B) = 7$.	☐	☐
d) Si A est une matrice carrée triangulaire inférieure, alors A est inversible.	☐	☐

Sol.: *Vrai : a). Faux : b), c), d).*

Exercice 14 (QCM)

a) Soit a, b, c des nombres réels. On considère les quatre polynômes $p(t) = t^2 + t + 1$, $q(t) = t^2 + 2t + a$, $r(t) = t^3 + b$ et $s(t) = t + c$. Alors

☐ La famille $\{p, q, r, s\}$ forme une base de $\mathbb{P}_4$ pour certaines valeurs des paramètres a, b, c ;

☐ La famille $\{p, q, r, s\}$ forme une base de $\mathbb{P}_3$ pour certaines valeurs des paramètres a, b, c ;

☐ La famille $\{p, q, r, s\}$ est toujours linéairement dépendante dans $\mathbb{P}_4$;

☐ La famille $\{p, q, r, s\}$ est linéairement dépendante dans $\mathbb{P}_3$ lorsque $a - c - 1 \neq 0$.

b) Soient $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & b \end{pmatrix}$. Alors les matrices A_i, $i = 1, 2, 3, 4$, sont linéairement indépendantes

☐ pour toutes valeurs de a, b.

☐ lorsque $a \neq 0$ et pour toutes valeurs de b.

☐ lorsque $a \neq 0$ et $b \neq 3$.

☐ lorsque $a \neq 0$ et $b = 3$.

c) Dire lequel parmi les énoncés suivants est vrai.

☐ Soit f un vecteur de l'espace vectoriel V des fonctions réelles d'une variable réelle. S'il existe un réel t tel que $f(t) = 0$, alors f est le vecteur nul de V.

☐ Soit f un vecteur de l'espace vectoriel V des fonctions réelles d'une variable réelle. Si f est le vecteur nul de V, alors $f(t) = 0$ pour tout nombre réel t.

☐ Soit p un vecteur de l'espace vectoriel V des polynômes de degré $\leqslant 5$. Si $p(0) = 0$, alors p est le vecteur nul de V.

☐ Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ un vecteur de l'espace vectoriel V des suites réelles. S'il existe un entier n tel que $x_n = 0$, alors $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est le vecteur nul de V.

Sol.:

a) ☐ *La famille $\{p, q, r, s\}$ forme une base de $\mathbb{P}_3$ pour certaines valeurs des paramètres a, b, c.*
En effet on élimine d'emblée la première réponse puisque t^4 ne peut visiblement pas être obtenu comme combinaison linéaire des polynômes proposés pour des raisons de degré. Pour la suite on se demande si la famille $\{p.q, r, s\}$ est libre. On aimerait donc savoir quelle(s) combinaison(s) linéaire(s) $\alpha p + \beta q + \gamma r + \delta s$ donne le polynôme nul. Tous ses coefficients sont nuls et nous obtenons donc un système de quatre équations :

$$\begin{cases} & & \gamma & & = 0 \\ \alpha & +\beta & & & = 0 \\ \alpha & +2\beta & & +\delta & = 0 \\ \alpha & +a\beta & +b\gamma & +c\delta & = 0 \end{cases}$$

Le nombre de solutions de ce système dépend des valeurs des paramètres. Lorsque $a - 1 = c$, il y a une infinité de solutions, la famille de polynômes n'est donc pas libre. Mais, dans tous les autres cas, lorsque $a - 1 \neq c$, la seule solution est $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$ et la famille forme donc une base de $\mathbb{P}_3$.

b) ☐ *lorsque $a \neq 0$ et $b \neq 3$.*
Il y a deux manières de résoudre cet exercice. Soit on écrit un système $\alpha A_1 + \beta A_2 + \gamma A_3 + \delta A_4 = 0$, où 0 est la matrice nulle, et on trouve que pour forcer $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$ il faut avoir $a \neq 0$ et $b \neq 3$. Soit on considère la base canonique $(e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22})$ des matrices 2×2 et on écrit chacune des matrices A_i, $i = 1, 2, 3, 4$, dans cette base (sous forme de vecteurs). On peut ensuite échelonner le système

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{pmatrix}$$

pour trouver sous quelles valeurs de a et b le système contient 4 pivots.

c) ☐ *Soit f un vecteur de l'espace vectoriel V des fonctions réelles d'une variable réelle. Si f est le vecteur nul de V, alors $f(t) = 0$ pour tout nombre réel t.*
Les autres affirmations sont toutes incorrectes pour la même raison. Il ne suffit pas

de s'annuler en un point pour être le vecteur nul. La fonction nulle est la fonction constamment nulle, le polynôme nul est le polynôme 0*, la suite nulle est la suite constamment nulle. Seuls ces vecteurs ont la propriété de ne pas modifier le vecteur auquel on les additionne.*