Série 5 (Corrigé)

Exercice 1 (Matrice associée canoniquement)

Dire si les applications ci-dessous sont linéaires. Calculer la matrice associée canoniquement à chacune des applications qui sont linéaires et déterminer si les applications linéaires sont injectives, surjectives ou bijectives.

a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ donnée par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 \\ x_2 - x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donnée par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_2 \\ -3x_1 \end{pmatrix}$$

c) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donnée par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{x_1} \\ 5x_2 \end{pmatrix}$$

d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donnée par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

e) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donnée par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sin(x_1) \\ \cos(x_2) \end{pmatrix}$$

f) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ donnée par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_3 \\ x_1 - x_2 - x_3 \\ x_1 + x_3 + x_4 \end{pmatrix}$$

Sol.:

a) T est linéaire.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

T est injective mais pas surjective.

b) T est linéaire.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

T est bijective.

c) T est n'est pas linéaire.

d) T est linéaire.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

T est bijective.

e) T n'est pas linéaire.

f) T est linéaire.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

T n'est pas injective mais elle est surjective.

Exercice 2 (Injective, surjective)

Calculer la matrice associée à l'application linéaire $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ donnée par

$$T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x + 3y + 5z + 7u \\ -x + 3y \\ x + 2y + 3z + 7u \end{pmatrix}$$

et déterminer si l'application est injective, surjective ou bijective.

Sol.: *Pour gagner de la place dans le corrigé, on utilise la notation vecteur-ligne. Soit $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire donnée par*

$$T(x, y, z, u) = (x + 3y + 5z + 7u\ ,\ -x + 3y\ ,\ x + 2y + 3z + 7u)\,.$$

Nous avons

$$\begin{cases} T(1,0,0,0) = (1,-1,1) \\ T(0,1,0,0) = (3,3,2) \\ T(0,0,1,0) = (5,0,3) \\ T(0,0,0,1) = (7,0,7) \end{cases} \implies A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- *Comme il n'y a pas un pivot par colonne, l'application linéaire n'est pas injective.*
- *Comme il y a un pivot par ligne, l'application linéaire est surjective.*
- *Comme l'application linéaire n'est pas injective, elle n'est pas bijective.*

Exercice 3 (Composition de transformations)

Soient $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$, et $T_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto x_1 + x_2 + x_3$.

a) Écrire les matrices canoniques associées à T_1 et T_2 et le produit matriciel associé à la composition $T_2 \circ T_1$ telle que $T_2 \circ T_1(\vec{x}) = T_2\left(T_1(\vec{x})\right)$ pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$.

b) Quel est le domaine de définition de $T_2 \circ T_1$? Quel est le domaine d'arrivée ?

Sol.:

a) $T_1(\boldsymbol{e}_1) = T_1(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $T_1(\boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. *Donc* $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

De même $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi la composition $T_2 \circ T_1$ *correspond à* $A_2A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$.

b) On a $T_2 \circ T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. *Le domaine de définition est* $\mathbb{R}^2$. *Le domaine d'arrivée est* $\mathbb{R}$.

Exercice 4 (Matrice associée à des transformations géométriques)

Déterminer les matrices associées aux applications linéaires suivantes et calculer ensuite l'image d'un vecteur quelconque (x, y) :

a) rotation ρ d'angle $\frac{\pi}{4}$ dans le sens positif,

b) symétrie σ par rapport à la droite $y = -x$.

Sol.: *a)* *La rotation* ρ *d'angle* $\frac{\pi}{4}$ *est telle que*

$$\begin{cases} \rho(1,0) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\,) \\ \rho(0,1) = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\,) \end{cases} \implies M_\rho = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Comme

$$M_\rho \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} x-y \\ x+y \end{pmatrix},$$

l'image par ρ *d'un vecteur quelconque* (x,y) *est*

$$\rho(x,y) = \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y\,,\, x+y)\,.$$

b) *La symétrie* σ *par rapport à la droite* $y=-x$ *envoie le vecteur* $(1,0)$ *sur le vecteur* $(0,-1)$ *et le vecteur* $(0,1)$ *sur le vecteur* $(-1,0)$.

Nous avons donc :

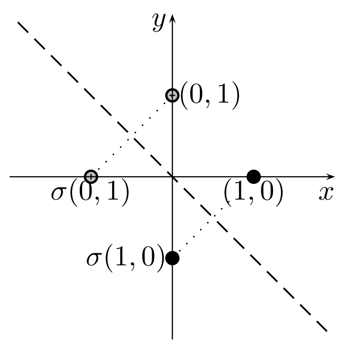
$$\begin{cases} \sigma(1,0) = (0,-1) \\ \sigma(0,1) = (-1,0) \end{cases} \implies M_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

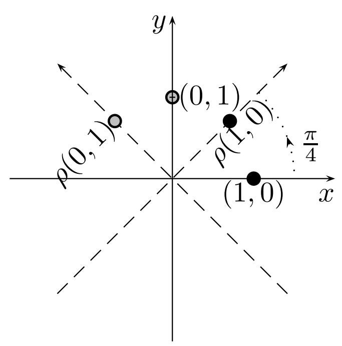
Comme

$$M_\sigma \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ -x \end{pmatrix},$$

l'image par σ *d'un vecteur quelconque* (x,y) *est*

$$\sigma(x,y) = (-y,-x)\,.$$





Exercice 5 (Injective, surjective)

Soit $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application linéaire.

Déterminer la condition nécessaire que doivent satisfaire m et n pour que

a) T soit surjective,

b) T soit injective,

c) T soit bijective.

Sol.:

a) Pour que l'application linéaire $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ soit surjective, il faut que la matrice associée ait une position pivot par ligne. La condition nécessaire (mais pas suffisante) est donc $n \geqslant m$.

b) Pour que l'application linéaire $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ soit injective, il faut que la matrice associée ait une position pivot par colonne. La condition nécessaire (mais pas suffisante) est donc $n \leqslant m$.

c) Pour que l'application linéaire $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ soit bijective, il faut que T soit surjective et injective. La condition nécessaire (mais pas suffisante) est donc $n = m$.

Exercice 6 (Solution générale)

Trouver la solution générale du système d'équations linéaires suivant

$$\begin{cases} 3x_1 & +6x_2 & +9x_3 & +5x_4 + 25x_5 & =53 \\ 7x_1 & +14x_2 & +21x_3 & +9x_4 + 53x_5 & =105 \\ -4x_1 & -8x_2 & -12x_3 & +5x_4 - 10x_5 & =11 \end{cases}$$

Sol.: *La solution générale est donnée par*

$$S = \{ \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid k, l, m \in \mathbb{R}\}$$

Exercice 7 (Applications aux équations chimiques)

Les équations en chimie traduisent les quantités de substances absorbées et produites au cours d'une réaction chimique. Lors de la combustion du méthane CH_4 par exemple, le méthane CH_4 réagit avec l'oxygène O_2 pour former du dioxyde de carbone CO_2 et de l'eau H_2O selon

$$\alpha_1 CH_4 + \alpha_2 O_2 \longrightarrow \alpha_3 CO_2 + \alpha_4 H_2O. \tag{1}$$

"Pondérer" cette équation signifie trouver des nombres entiers strictement positifs α_1, α_2, α_3, α_4 tels que le nombre total d'atomes de carbone (C), d'hydrogène (H) et d'oxygène (O) du membre de gauche et de droite soit égal (conservation de la matière).

Question : Pondérer l'équation (1).
Note : Les chimistes préfèrent les plus petits entiers $\alpha_1, \ldots, \alpha_4$ qui "réalisent" la podération.
Pour cela, considérer pour chaque molécule de la réaction le vecteur

$$\begin{pmatrix} \text{nombre d'atomes de carbone} \\ \text{nombre d'atomes d'hydrogène} \\ \text{nombre d'atomes d'oxygène} \end{pmatrix}$$

et écrire le système linéaire associé sous la forme

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} = \alpha_3 \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix},$$

puis résoudre le système.

Sol.: *On a*

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On peut réécrire ce système linéaire sous la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La forme échelonnée réduite de la matrice augmentée est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les variables de base sont $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tandis que α_4 est une variable libre. La solution générale est $\alpha_1 = \alpha_4/2$, $\alpha_2 = \alpha_4$, $\alpha_3 = \alpha_4/2$ (infinité de solutions). On donne la solution entière la plus petite : $\boxed{\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2, \alpha_3 = 1, \alpha_4 = 2}$.

Exercice 8 (Multiplication matricielle)

a) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Est-ce que $AB = BA$?

b) Même question pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Sol.:

a) *Oui.* $AB = BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Remarque : A est la matrice identité, elle commute avec n'importe quelle matrice.

b) *Non.* $AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 9 (Multiplication matricielle)

Considérons les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Calculer les produits suivants (s'ils existent). Si les produits n'existent pas, expliquer pourquoi.

a) AB, BA, AC, CA, BC, CB, CD, EC, EA

b) AA^T, A^TA, BA^T, BC^T, C^TA, BD^T, D^TB

Sol.:

a) $AB = \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 9 \end{pmatrix}$, AC *n'existe pas :* $(2 \times 3) \times (2 \times 2)$, $CA = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 4 & 5 & 8 \end{pmatrix}$, $BC = \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 6 & 12 \\ 9 & 15 \end{pmatrix}$, CB *n'existe pas :* $(2 \times 2) \times (3 \times 2)$, CD *n'existe pas :* $(2 \times 2) \times (3 \times 1)$, $EC = \begin{pmatrix} 9 & 15 \end{pmatrix}$, $EA = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 9 \end{pmatrix}$.

b) $AA^T = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $A^TA = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, BA^T *n'existe pas :* $(3 \times 2) \times (3 \times 2)$, $BC^T = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 8 & 10 \\ 13 & 14 \end{pmatrix}$, $C^TA = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 6 & 6 & 9 \end{pmatrix}$, BD^T *n'existe pas :* $(3 \times 2) \times (1 \times 3)$, $D^TB = \begin{pmatrix} 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Exercice 10 (Cas particuliers)

a) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$. Trouver (si elle existe) une matrice B de taille 2×2 non nulle telle que $AB = 0$. Indication : écrire AB sous la forme $\begin{pmatrix} A\vec{b}_1 & A\vec{b}_2 \end{pmatrix}$

b) Même question pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

c) Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & k \end{pmatrix}$. Pour quelle(s) valeur(s) de $k \in \mathbb{R}$ a-t-on $AB = BA$?

d) Trouver une matrice A non nulle telle que $A^2 = 0$.

Sol.:

a) On note $\vec{b}_1$ et $\vec{b}_2$ les colonnes de B : $B = \begin{pmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 \end{pmatrix}$. On a $AB = \begin{pmatrix} A\vec{b}_1 & A\vec{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi, on doit chercher un vecteur non nul $\vec{b}_1$ tel que $A\vec{b}_1 = \vec{0}$. Si un tel vecteur existe, on peut poser par exemple $B = \begin{pmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 \end{pmatrix}$ avec $\vec{b}_2 = \vec{0}$. Sinon, une telle matrice B n'existe pas.

Soit $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Le système $A\vec{b}_1 = \vec{0}$ est linéaire en x_1 et x_2 avec pour matrice augmentée $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$, dont la forme échelonnée réduite est $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi, la solution générale est $x_1 = -2x_2$, c'est-à-dire, sous forme vectorielle $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} x_2$. Ainsi, (en fixant $x_2 = 1$) on trouve un vecteur $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ tel que $A\vec{b}_1 = \vec{0}$. On peut donc proposer la matrice $B = \begin{pmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) En résolvant $A\vec{b}_1 = \vec{0}$ pour $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ on obtient un système linéaire avec pour matrice augmentée $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. La forme échelonnée réduite est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Par conséquent, le système a une unique solution triviale $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et la matrice B telle que $AB = 0$ n'existe pas.

c) On calcule $AB = \begin{pmatrix} 1 & 12 - 4k \\ -30 & -20 + k \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 1 & -24 \\ 15 - 5k & -20 + k \end{pmatrix}$. L'équation $AB = BA$ équivaut donc au système

$$\begin{cases} 12 - 4k &= -24 \\ -30 &= 15 - 5k, \end{cases}$$

avec pour unique solution $k = 9$.

d) Par exemple, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 11 (Vrai-Faux)

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

V F

a) Si la matrice échelonnée-réduite associée à un système d'équations linéaires homogènes à m équations et n inconnues possède r pivots, alors le système a $n - r$ variables secondaires (libres). ☐ ☐

b) Si un système d'équations linéaires homogènes possède plus d'inconnues que d'équations, alors il a une infinité de solutions. ☐ ☐

c) Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^2$, alors $\vec{w}$ est une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$. ☐ ☐

d) Si le vecteur $\vec{v}_4$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ et $\vec{v}_3$, alors le vecteur $\vec{v}_1$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ et $\vec{v}_4$. ☐ ☐

Sol.: *a),b) vraies. c), d) fausses.*

Exercice 12 (QCM)

Soit R la matrice échelonnée-réduite associée à la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 & 8 \\ -1 & 2 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & -5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Nous avons

☐ $r_{14} = 6$ ☐ $r_{14} = 5$ ☐ $r_{14} = 3$ ☐ $r_{14} = 2$

Sol.: $r_{14} = 5$

Exercice 13 (Vrai-Faux)

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

V F

a) Si $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ est un ensemble linéairement indépendant de $\mathbb{R}^n$ et $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est une application linéaire, alors $\{T(\vec{v}_1), T(\vec{v}_2)\}$ est un ensemble linéairement indépendant de $\mathbb{R}^m$. ☐ ☐

b) Si $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ est un ensemble linéairement dépendant de $\mathbb{R}^n$ et $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est une application linéaire, alors $\{T(\vec{v}_1), T(\vec{v}_2)\}$ est un ensemble linéairement dépendant de $\mathbb{R}^m$. ☐ ☐

c) Soit $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application linéaire. Si les vecteurs $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ engendrent $\mathbb{R}^n$ et sont tels que $T(\vec{v}_j) = \vec{0}$ pour tout $j \in \{1, \ldots, k\}$, alors $T(\vec{v}) = \vec{0}$ pour tout $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$. ☐ ☐

d) Si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ et $T(\vec{0}) = \vec{0}$, alors T est une application linéaire. ☐ ☐

e) Si $T(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = \lambda T(\vec{u}) + \mu T(\vec{v})$ pour tout $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est une application linéaire. ☐ ☐

Sol.: *b), c), e) vraies. a), d) fausses.*

Exercice 14 (QCM)

a. Combien de colonnes pivots une matrice 7×5 doit-elle posséder pour que ses colonnes soient linéairement indépendantes ?

☐ Moins de 5, ☐ 5 exactement, ☐ 7 exactement, ☐ entre 5 et 7.

b. Combien de colonnes pivots une matrice 5×7 doit-elle posséder pour que ses colonnes engendrent $\mathbb{R}^5$?

☐ Moins de 5, ☐ 5 exactement, ☐ 7 exactement, ☐ entre 5 et 7.

c. L'application linéaire du plan $\mathbb{R}^2$ dont la matrice est $\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$ est

☐ une rotation ☐ une translation ☐ une projection orthogonale ☐ une homothétie

Sol.:

a. Combien de colonnes pivots une matrice 7×5 doit-elle posséder pour que ses colonnes soient linéairement indépendantes ?

Elle doit posséder cinq colonnes pivots, parce que s'il n'y a pas cinq pivots alors il existe des inconnues libres et donc les colonnes sont dépendantes.

b. Combien de colonnes pivots une matrice 5×7 doit-elle posséder pour que ses colonnes engendrent $\mathbb{R}^5$?

Si les colonnes d'une matrice 5×7 engendrent $\mathbb{R}^5$ alors cette matrice doit posséder un pivot dans chaque ligne. Puisque chaque position pivot est dans une colonne cette matrice doit donc posséder cinq colonnes pivots.

c. C'est une projection orthogonale sur la diagonale $x = y$. On voit dans les colonnes de cette matrice que les images des deux vecteurs $\overrightarrow{e}_1$ et $\overrightarrow{e}_2$ sont égales et se trouvent sur cette diagonale. Une contemplation un peu plus approfondie de ces images montre qu'il s'agit bien des projections orthogonales.