Série 13 (Corrigé)

Exercice 1 (Inverse)

Trouver la matrice inverse A^{-1} de

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1/2} & 0 & -\sqrt{1/2} & 0 \\ \sqrt{1/3} & 0 & -\sqrt{2/3} & 0 & 0 \\ \sqrt{2/3} & 0 & \sqrt{1/3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{1/2} & 0 & \sqrt{1/2} & 0 \end{pmatrix}$$

Sol.:

Il suffit de vérifier que A est une matrice orthogonale, i.e. $A^T A = I_5$. Ainsi $A^{-1} = A^T$.

Exercice 2 (Projection sur une droite)

Soit $\mathrm{proj}_W : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la projection sur le sous-espace W de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0\,, \\ x_1 - x_2 - 4x_3 = 0\,. \end{cases}$$

1. Donner la matrice associée à cette projection.
2. Soit A le point dont les coordonnées sont $(3, 11, -1)$. Calculer les coordonnées de la projection orthogonale de A sur W.

Sol.: *On remarque que W est une droite dirigée par*

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $\mathcal{B} = (\vec{v})$ est une base de W, et $\mathcal{B}' = (\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|})$ est une base orthonormée de W. Comme vu au cours, la projection $\mathrm{proj}\, W$ *est donc représentée par la matrice*

$$UU^T = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/9 & -4/9 & 2/9 \\ -4/9 & 4/9 & -2/9 \\ 2/9 & -2/9 & 1/9 \end{pmatrix}$$

En identifiant le point A avec l'extrémité du vecteur $\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ -1 \end{pmatrix}$, on obtient sa projection en calculant

$$UU^T \vec{w} = \begin{pmatrix} 4/9 & -4/9 & 2/9 \\ -4/9 & 4/9 & -2/9 \\ 2/9 & -2/9 & 1/9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -34/9 \\ 34/9 \\ -17/9 \end{pmatrix},$$

donc la projection orthogonale de A sur W a pour coordonnées $(-34/9, 34/9, -17/9)$.

Exercice 3 (Projection)

Soit W le plan engendré par les vecteurs

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Est-ce que $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \in W$ est le point le plus proche de $\vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ parmi tous les points de W ? Répondre sans calculer explicitement la projection orthogonale.

Indication : Utiliser $\vec{v}_\perp$.

Sol.:

Pour vérifier que $\vec{u}$ est bien la projection de $\vec{v}$ sur W, on peut appliquer l'une des deux méthodes suivantes :

a) On rappelle que le point $\vec{v}$ se décompose de manière unique comme

$$\vec{v} = \mathrm{proj}_W(\vec{v}) + \vec{v}_\perp,$$

où $\vec{v}_\perp \in W^\perp$. C'est-à-dire

$$\vec{v}_\perp = \vec{v} - \mathrm{proj}_W(\vec{v}).$$

Pour vérifier que $\vec{u} = \mathrm{proj}_W(\vec{v})$, il suffit de vérifier que la différence

$$\vec{v} - \vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \in W^\perp.$$

Dans notre cas, on vérifie que

$$\langle \vec{v} - \vec{u}, \vec{u}_1 \rangle = 0 = \langle \vec{v} - \vec{u}, \vec{u}_2 \rangle,$$

ainsi $\vec{u} = \mathrm{proj}_W(\vec{v})$.

b) On applique Gram-Schmidt pour trouver une base orthogonale de W donnée par $W = \mathrm{Vect}\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$, pour

$$\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Puis on trouve la projection

$$\mathrm{proj}_W(\vec{v}) = \frac{\langle \vec{v}, \vec{w}_1 \rangle}{\langle \vec{w}_1, \vec{w}_1 \rangle}\vec{w}_1 + \frac{\langle \vec{v}, \vec{w}_2 \rangle}{\langle \vec{w}_2, \vec{w}_2 \rangle}\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 (Orthogonal)

Soit W le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par $\vec{w}_1$ et $\vec{w}_2$, où

$$\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

a) Calculer et décrire $W^\perp$.
b) Vérifier que $\dim(W) + \dim(W^\perp) = 4$.

Sol.:

a) On cherche les vecteurs $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$ *qui satisfont* $\langle \vec{x}, \vec{w}_1 \rangle = 0 = \langle \vec{x}, \vec{w}_2 \rangle$ *, c'est-à-dire qui satisfont le système linéaire*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Si on pose la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \vec{w}_1 & \vec{w}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

alors $W = \mathrm{Im}(A)$ *et on cherche* $\mathrm{Im}(A)^\perp = \mathrm{Ker}(A^T)$*. On réduit donc la matrice augmentée*

$$(A^T \mid \vec{0}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

On trouve donc $W^\perp = \mathrm{Vect}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$*, pour*

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Finalement on peut vérifier que $\langle \vec{w}_i, \vec{v}_j \rangle = 0$*, pour tout* $i, j \in \{1, 2\}$.

b) $\dim(W) = 2$*, et* $\dim(W^\perp) = 2$*, ainsi* $\dim(W) + \dim(W^\perp) = 4$.

Exercice 5 (Moindres carrés)

On considère les points

x_i	2	5	6	8
y_i	1	2	3	3

On suppose que la relation entre les x_i et les y_i suit une loi $y = \beta_0 + \beta_1 x$. Calculer $\hat{\beta}_0$ et $\hat{\beta}_1$ au sens des moindres carrés.

Sol.: *Le système linéaire correspondant est* $X\vec{\beta} = \vec{y}$, *où*

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \\ 1 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \\ 1 & 6 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}, \quad \vec{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

L'équation normale correspondante est $X^T X\hat{\beta} = X^T\vec{y}$. *On calcule*

$$(X^T X)^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 21 \\ 21 & 129 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{75}\begin{pmatrix} 129 & -21 \\ -21 & 4 \end{pmatrix}, \quad X^T\vec{y} = \begin{pmatrix} 9 \\ 54 \end{pmatrix}.$$

On obtient la solution

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T \vec{y} = \frac{1}{75}\begin{pmatrix} 27 \\ 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/25 \\ 9/25 \end{pmatrix}.$$

Parmi toutes les droites $y = \beta_0 + \beta_1 x$, *la droite*

$$y = \frac{9}{25} + \frac{9}{25}x$$

est celle qui minimise la somme des carrés des résidus.

Exercice 6 (Moindres carrés)

Les données suivantes décrivent le potentiel dans un câble électrique en fonction de la température du câble.

i	T_i $[°C]$	U_i $[V]$
1	0	-2
2	5	-1
3	10	0
4	15	1
5	20	2
6	25	4

On suppose que le potentiel suit la loi $U = a + bT + cT^2$. Calculer a, b, c au sens des moindres carrés.

Sol.: *Le système linéaire s'écrit*

$$\vec{U} = A\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix},$$

avec $\vec{U} = \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_6 \end{pmatrix}$ *et* A *est donnée par*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & T_1 & T_1^2 \\ 1 & \vdots & \vdots \\ 1 & & \\ 1 & & \\ 1 & \vdots & \vdots \\ 1 & T_6 & T_6^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 25 \\ 1 & 10 & 100 \\ 1 & 15 & 225 \\ 1 & 20 & 400 \\ 1 & 25 & 625 \end{pmatrix}.$$

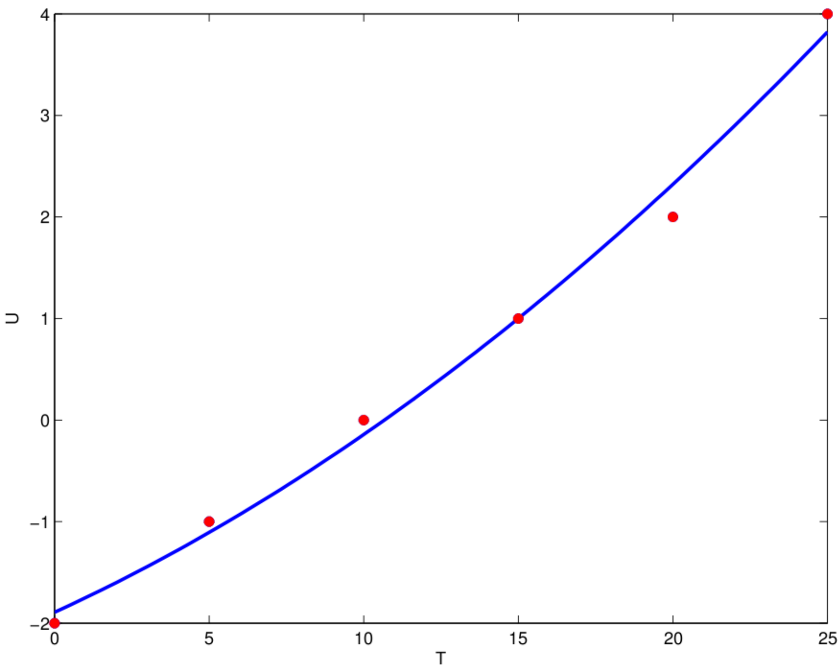
Pour résoudre ce système et trouver a, b, c *au sens des moindres carrés, on considère l'équation normale*

$$A^T\vec{U} = A^T A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

On trouve

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-53}{28} \\ \frac{39}{280} \\ \frac{1}{280} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -1.89 \\ 0.139 \\ 0.00357 \end{pmatrix}.$$

Le graphique suivant montre les données (en rouge) et la courbe d'interpolation (bleue) obtenue au sens des moindres carrés.



Exercice 7 (Preuve)

Démontrer l'identité du parallélogramme : Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$, alors

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = 2\|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{v}\|^2.$$

De plus, montrer que si $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ forme une famille orthonormale, alors $\|\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{2}$.

Sol.:

Observer que $\vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{u} - \vec{v}$ sont les deux diagonales du parallélogramme $\vec{0}, \vec{u}, \vec{v}, \vec{u} + \vec{v}$.

En développant les produits scalaires

$$\begin{aligned}
\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 &= \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \\
\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 &= \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle - \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle
\end{aligned}$$

En ajoutant ces deux égalités, on obtient l'identité du parallélogramme.

Si $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ forme une famille orthonormale, alors

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle - \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 2.$$

Exercice 8 (Regression linéaire)

Soient les cinq points du plan $(-2, 4)$, $(-1, 1)$, $(0, 1)$, $(1, 3)$, $(2, 3) \in \mathbb{R}^2$.

a) Faire un graphe contenant les points ci-dessus.
b) Trouver la droite qui approxime le mieux (au sens des moindres carrés) les points ci-dessus.
c) Trouver la parabole qui approxime le mieux (au sens des moindres carrés) les points ci-dessus.

Sol.:

Pour trouver la droite $y = \beta_0 + \beta_1 x$ qui approxime le mieux les points donnés, on résout au sens des moindres carrés le système $X\vec{\beta} = \vec{y}$, pour

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Comme les colonnes de X sont linéairement indépendantes, il existe une unique solution au sens des moindres carrés, donnée par

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T \vec{y}.$$

On calcule

$$(X^T X)^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 \\ 0 & 1/10 \end{pmatrix}, \quad X^T \vec{y} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La solution est donnée par

$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} 12/5 \\ 0 \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire la droite horizontale

$$y = 12/5 + 0 \cdot x = 12/5.$$

Comme les colonnes $\vec{x}_1$ et $\vec{x}_2$ de X sont orthogonales, il suffisait de calculer la projection orthogonale

$$\mathrm{proj}_{\mathrm{Im}(X)}(\vec{y}) = \frac{\langle \vec{y}, \vec{x}_1 \rangle}{\langle \vec{x}_1, \vec{x}_1 \rangle}\vec{x}_1 + \frac{\langle \vec{y}, \vec{x}_2 \rangle}{\langle \vec{x}_2, \vec{x}_2 \rangle}\vec{x}_2 = \frac{12}{5}\vec{x}_1 + \frac{0}{10}\vec{x}_2.$$

Pour trouver la parabole $y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$ qui approxime le mieux les points donnés, on résout au sens des moindres carrés le sytème $X\vec{\beta} = \vec{y}$, pour

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Comme les colonnes de X sont linéairement indépendantes, il existe une unique solution au sens des moindres carrés, donnée par

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T \vec{y}.$$

On calcule

$$(X^T X) = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{pmatrix}, \quad X^T \vec{y} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 32 \end{pmatrix}.$$

Pour éviter de calculer $(X^T X)^{-1}$, on peut trouver la solution $\hat{\beta}$ du système d'équations normales $(X^T X)\hat{\beta} = X^T \vec{y}$ en réduisant la matrice augmentée

$$\left(X^T X \mid X^T \vec{y}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 10 & 12 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 34 & 32 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 44/35 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4/7 \end{array}\right).$$

La solution est donnée par

$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} 44/35 \\ 0 \\ 4/7 \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire la parabole

$$y = \frac{44}{35} + 0 \cdot x + \frac{4}{7}x^2.$$

Exercice 9 (QR)

Soit $A = (\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_n)$ une matrice $m \times n$ dont les colonnes sont linéairement indépendantes. Soient $Q = (\vec{q}_1 \ldots \vec{q}_n)$ et $R = (\vec{r}_1 \ldots \vec{r}_n)$ les matrices obtenues de la factorisation QR.

1. Montrer que $\vec{a}_i = r_{1i}\vec{q}_1 + r_{2i}\vec{q}_2 + \ldots r_{ii}\vec{q}_i$. On obtient que les colonnes de A sont des combinaisons linéaires des colonnes de Q avec comme coefficients les composantes de R.
(**Indication** : utilisez $\vec{a}_i = Q\vec{r}_i$)
2. Trouver la factorisation QR de la matrice A ci-dessous, en utilisant le point précédent pour trouver la matrice R.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque : pour trouver R on peut aussi utiliser $R = Q^T A$ mais ici vous voyez une manière alternative.

Sol.:

1. *On a $A = (\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_n) = QR = (Q\vec{r}_1 \ldots Q\vec{r}_n)$ Ainsi $\vec{a}_i = Q\vec{r}_i$. Comme la matrice R est triangulaire supérieure, on a*

$$\vec{r}_i = \begin{pmatrix} r_{1i} \\ r_{2i} \\ \vdots \\ r_{ii} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi $Q\vec{r}_1 = r_{11}\vec{q}_1 + 0\vec{q}_2 + 0\vec{q}_3$ et $Q\vec{r}_2 = r_{12}\vec{q}_1 + r_{22}\vec{q}_2 + 0\vec{q}_3$. On obtient alors

$$\vec{a}_i = r_{1i}\vec{q}_1 + r_{2i}\vec{q}_2 + \ldots r_{ii}\vec{q}_i$$

2. *On trouve la matrice Q en appliquant Gram-Schmidt sur les colonnes de A. On obtient*

$$Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Clairement $\vec{a}_1 = \sqrt{2}\vec{q}_1$, ainsi $r_{11} = \sqrt{2}$. Pour trouver r_{12} et r_{22} on doit résoudre

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = r_{12} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} + r_{22} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

et on obtient $r_{12} = \sqrt{2}/2 = r_{22}$. On procède de la même manière pour trouver r_{13}, r_{23} et r_{33}. On a

$$R = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 10 (Diagonalisation)

Diagonaliser les matrices suivantes sous la forme $A = GDG^T$, avec G une matrice orthogonale (et D une matrice diagonale).

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Sol.: *A est une matrice symétrique, elle est donc diagonalisable en base orthonormale d'après le théorème spectral. On calcule les espaces propres et on cherche dans chacun d'eux une base orthonormale de vecteurs propres.*

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, on pourra utiliser le fait que les valeurs propres sont $5, 2$, et -2.

Sol.: *A est une matrice symétrique, elle est donc diagonalisable en base orthonormale d'après le théorème spectral. On trouve*

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Exercice 11 (Diagonalisation)

On suppose A est une matrice symétrique de taille $n \times n$.

i) Montrer qu'il existe une base orthonormale $\{u_1, \ldots, u_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$A = \lambda_1 u_1 u_1^T + \lambda_2 u_2 u_2^T + \ldots + \lambda_n u_n u_n^T.$$

Sol.: Méthode 1. *On applique le théorème spectral à la matrice symétrique A. Il existe une matrice orthogonale Q et une matrice diagonale D telles que*

$$A = QDQ^T.$$

On note $Q = (u_1, \ldots, u_n)$ les colonnes de Q, et on pose $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$. Comme Q est une matrice orthogonale, $(u_1, \ldots, u_n)$ est une base orthonormée. De plus, on a

$$\begin{aligned} A &= QDQ^T = \begin{pmatrix} u_1, \ldots, u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^T \\ \vdots \\ u_n^T \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_1, \ldots, u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 u_1^T \\ \vdots \\ \lambda_n u_n^T \end{pmatrix} = \lambda_1 u_1 u_1^T + \ldots + \lambda_n u_n u_n^T. \end{aligned}$$

Méthode 2. *Soit $\{u_1, \dots, u_n\}$ une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ donnée par le théorème spectral appliqué à A, c-à-d vérifiant $Au_k = \lambda_k u_k$ pour tout k où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres.*
Pour montrer que deux matrices sont égales, il suffit de montrer que leurs produits avec tout vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ coïncident. Comme $\{u_1, \dots, u_n\}$ est une base, tout vecteur v se décompose sous la forme $v = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k$. On calcule :

$$Av = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k A u_k = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \lambda_k u_k$$

et

$$\left(\sum_{l=1}^{n} \lambda_l u_l u_l^T\right) \sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k = \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \lambda_l u_l u_l^T \alpha_k u_k = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \lambda_k u_k u_k^T u_k = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \lambda_k u_k,$$

où l'on a utilisé $u_l^T u_k = u_l \cdot u_k = 0$ pour $l \neq k$ et $u_k \cdot u_k = 1$. On obtient ainsi l'égalité des deux matrices A et $\left(\sum_{l=1}^{n} \lambda_l u_l u_l^T\right)$.

ii) Calculer la décomposition ci-dessus pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Sol.: *Les valeurs propres sont $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 0$. Les vecteurs propres associés sont $u_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$. On a donc la décomposition*

$$A = \lambda_1 u_1 u_1^T + \lambda_2 u_2 u_2^T = 2 \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Exercice 12 (Matrice symétrique)

Soit A une matrice symétrique de taille $n \times n$.

a) Montrer que $A\vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{v} \cdot A\vec{u}$ pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$.
Sol.: *En effet, $A\vec{v} \cdot \vec{u} = (A\vec{v})^T \vec{u} = \vec{v}^T A^T \vec{u} = \vec{v}^T A \vec{u} = \vec{v} \cdot A\vec{u}$.*

b) Donner un contre-exemple à a) pour une matrice carrée quelconque, en trouvant une matrice B de taille 2×2 telle que $B\vec{v} \cdot \vec{u} \neq \vec{v} \cdot B\vec{u}$ en général.
Sol.: *Par exemple, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a $B\vec{v} \cdot \vec{u} \neq \vec{v} \cdot B\vec{u}$ pour $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.*

Exercice 13 (Diagonalisation)

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Diagonaliser A en base orthonormée.

Sol.: *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Méthode 1 *On calcule le polynôme charactéristique $c_A(t) = \cdots = (t-6)(t-2)^3$, et on trouve $\lambda \in \{6, 2\}$.* ***Méthode 2*** *On voit que la somme de chaque ligne vaut 6. Ainsi*

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On obtient que 2 est une valeur propre en utilisant que la somme des valeurs propres donne la trace de A et le produit des valeurs propres donne le déterminant de A. On obtient que 6 est une valeur propre et 2 est une valeur propre de multiplicité géométrique 3 puisque la matrice $A - 2I_4$ est de rang 1. On en conclut sans faire de calculs que $c_A(t) = (t-6)(t-2)^3$.

On calcule ensuite les espaces propres et on cherche dans chacun d'eux une base orthonormée de vecteurs propres. D'abord

$$E_6 = \mathrm{Vect} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

On obtient

$$E_2 = Vect \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

On utilise alors le procédé de Gram-Schmidt pour que la base de E_2 soir orthonormée :

$$E_2 = \mathrm{Vect} \left(\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{6}/6 \\ \sqrt{6}/6 \\ -\sqrt{6}/3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{3}/6 \\ \sqrt{3}/6 \\ \sqrt{3}/6 \\ -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \right)$$

La matrice de changement de base suivante est donc orthogonale :

$$P = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{6}/6 & \sqrt{3}/6 & 1/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{6}/6 & \sqrt{3}/6 & 1/2 \\ 0 & -\sqrt{6}/3 & \sqrt{3}/6 & 1/2 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

La matrice inverse de P est la transposée P^T et la formule du changement de base donne enfin

$$D = P^T A P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Exercice 14 (VF)

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

a) Tout ensemble orthonormal de $\mathbb{R}^n$ est linéairement dépendant.

b) Soit W un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Si $\vec{v}$ est dans W et dans $W^\perp$, alors $\vec{v} = \vec{0}$.

c) Si U est une matrice $m \times n$ avec des colonnes orthonormales, alors $U^T U \vec{x} = \vec{x} \ \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

d) Si W est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, de dimension p $(0 < p \leq n)$, alors la méthode de Gram-Schmidt produit, à partir d'une base $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p\}$ de W, une base $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p\}$ avec $\|\vec{v}_i\| = 1, \forall i \in \{1, \ldots, p\}$.

Sol.: *Vrai : b), c). Faux : a), d).*