Série 12 (Corrigé)

Exercice 1 (Produit scalaire)

Soient $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$. Montrer que
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos\theta,$$
où θ est l'angle entre les deux vecteurs à l'origine.

Indication utiliser la loi des cosinus : $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$ où a, b, c sont les longueurs des cotés d'un triangle et γ est l'angle opposé au côté de longueur c.

Sol.: *On applique la loi des cosinus*
$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\theta)$$
On développe la norme de gauche
$$\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\theta)$$
On obtient alors
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{u}\| \cos\theta$$

Exercice 2 (preuve)

Soit W un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Soit $\{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_q\}$ une base orthogonale de W, et $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r\}$ une base orthogonale de $W^\perp$.

Montrer que $\{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_q,\ \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r\}$ est une famille orthogonale et prouver la relation
$$\text{dim}W + \text{dim}W^\perp = n.$$

En conclure que $W = (W^\perp)^\perp$.

Indication : On pourra utiliser la projection orthogonale, pour décomposer tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ comme somme d'un élément de W et d'un élément de $W^\perp$.

Sol.:

Le vecteur $\vec{w}_i$ et le vecteur $\vec{v}_j$ sont orthogonaux pour tous $i = 1 \ldots q,\ j = 1 \ldots r$ car ils appartiennent aux espaces orthogonaux W et $W^\perp$. Les vecteurs $\vec{w}_i$ sont orthogonaux entre eux car ils constituent une base orthogonale, de même pour les vecteurs $\vec{v}_j$. Ainsi, n'importe quels deux vecteurs dans la famille $\{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_q,\ \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r\}$ sont orthogonaux : c'est une famille orthogonale.

Montrons la relation $\dim W + \dim W^{\perp} = n$.
Méthode 1 : *La famille* $\{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_q,\ \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r\}$ *est orthogonale donc linéairement indépendante. De plus tout vecteur* $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ *se décompose sous la forme* $\vec{v} = \vec{z} + \vec{w}$ *avec* $\vec{z} \in W^{\perp}$ *et* $\vec{w} = \vec{p}_W(\vec{v}) \in W$*. Or* $\vec{z} \in W^{\perp}$ *peut être décomposé dans la base* $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r\}$ *de* $W^{\perp}$ *et* $\vec{p}_W(\vec{v}) \in W$ *peut être décomposé dans la base* $\{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_q\}$ *de* W*. Ainsi, tout vecteur* $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ *peut se décomposer selon la famille linéairement indépendante* $\{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_q,\ \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r\}$ *qui est donc une base de* $\mathbb{R}^n$*. Par conséquent* $q + r = n$.

Méthode 2 : *Appliquons le théorème du rang à l'application linéaire projection* $\vec{p}_W$ *:*

$$\dim \operatorname{Im} \vec{p}_W + \dim \operatorname{Ker} \vec{p}_W = n.$$

Or la projection vérifie $\operatorname{Ker} \vec{p}_W = W^{\perp}$ *et* $\operatorname{Im} \vec{p}_W = W$*, d'où le résultat.*

Pour conclure que $W = (W^{\perp})^{\perp}$*, on utilise l'égalité trouvée sur les dimensions appliquée au sous-espace vectoriel* $W^{\perp}$*. Ainsi*

$$\dim(W^{\perp}) + \dim((W^{\perp})^{\perp}) = n.$$

On conclut alors que

$$\dim(W) = n - \dim(W^{\perp}) = \dim((W^{\perp})^{\perp}).$$

Comme W *est un sous-espace vectoriel de* $(W^{\perp})^{\perp}$ *(par un exercice précédant) qui a la même dimension, on conclut que* $W = (W^{\perp})^{\perp}$.

Exercice 3 (Produit scalaire)

Soit A une matrice $n \times n$ inversible. Montrer que la formule $(\vec{u}|\vec{v}) = (A\vec{u}) \cdot (A\vec{v}) = \vec{u}^T A^T A\vec{v}$ définit un produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$.

Sol.: *On doit vérifier les quatre axiomes :*

1. symétrie : $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$. *On a* $(\vec{u}|\vec{v}) = (A\vec{u}) \cdot (A\vec{v}) = (A\vec{v}) \cdot (A\vec{u}) = (\vec{v}|\vec{u})$.
2. linéarité : $\langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$. *On a* $(\vec{u} + \vec{v}|\vec{w}) = (A\,(\vec{u} + \vec{v})) \cdot (A\vec{w}) = (A\vec{u}) \cdot (A\vec{w}) + (A\vec{v}) \cdot (A\vec{w}) = (\vec{u}|\vec{w}) + (\vec{v}|\vec{w})$.
3. linéarité : $\langle \alpha\vec{u}, \vec{v} \rangle = \alpha \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$. *On a* $(\alpha\vec{u}|\vec{v}) = (A\alpha\vec{u}) \cdot (A\vec{v}) = \alpha\,(A\vec{u}) \cdot (A\vec{v}) = \alpha\,(\vec{u}|\vec{v})$.
4. définie positivité : $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \geq 0$ *et* $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0$ *ssi* $\vec{u} = \vec{0}$. *On a* $(\vec{u}|\vec{u}) = (A\vec{u}) \cdot (A\vec{u}) = \|A\vec{u}\|^2 \geq 0$ *où* $\|\cdot\|$ *correspond à la norme euclidienne. Comme* A *est inversible, on obtient le résultat.*

Exercice 4 (Orthogonalité)

Soient $\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a) Vérifier que $\vec{w}_1$ et $\vec{w}_2$ sont orthogonaux.
b) Calculer la projection orthogonale $\mathrm{proj}_W(\vec{v})$ de $\vec{v}$ sur $W = \mathrm{Vect}\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$.
c) Donner la décomposition $\vec{v} = \mathrm{proj}_W(\vec{v}) + \vec{z}$, où $\vec{z} \in W^\perp$.
d) Donner la matrice de l'application linéaire $\vec{v} \mapsto \mathrm{proj}_W(\vec{v})$ (relativement à la base canonique)

Sol.:

a) Un calcul direct donne $\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_2 = 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0$.

b)

$$\mathrm{proj}_W(\vec{v}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}_1}{\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_1}\vec{w}_1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}_2}{\vec{w}_2 \cdot \vec{w}_2}\vec{w}_2 = \frac{6}{3}\vec{w}_1 + \frac{-3}{2}\vec{w}_2 = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/2 \\ 1/2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

c) $\vec{v} = \vec{z} + \mathrm{proj}_W(\vec{v})$*, où* $\mathrm{proj}_W(\vec{v})$ *est calculé dans b),*

et $\vec{z}$ *est donné par* $\vec{z} = \vec{v} - \mathrm{proj}_W(\vec{v}) = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Remarque : on peut vérifier que $\vec{z} \cdot \vec{w}_1 = \vec{z} \cdot \vec{w}_2 = 0$*, c'est-à-dire* $\vec{z} \in W^\perp$.

d) On forme la matrice U contenant les vecteurs $\vec{w}_1$ et $\vec{w}_2$ normalisés, i.e.

$$U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice associée à la projection est donnée par

$$UU^T = \begin{pmatrix} 5/6 & -1/6 & 1/3 \\ -1/6 & 5/6 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

On peut vérifier que

$$UU^T \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/2 \\ 1/2 \\ 2 \end{pmatrix} = \mathrm{proj}_W(\vec{v}).$$

Même question pour $\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{w}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. (Trouver la matrice associée à la projection peut-être long !)

Sol.:

a) Les vecteurs $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3$ sont orthogonaux : $\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_2 = \vec{w}_1 \cdot \vec{w}_3 = \vec{w}_2 \cdot \vec{w}_3 = 0$.

b)

$$\mathrm{proj}_W(\vec{v}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}_1}{\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_1}\vec{w}_1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}_2}{\vec{w}_2 \cdot \vec{w}_2}\vec{w}_2 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}_3}{\vec{w}_3 \cdot \vec{w}_3}\vec{w}_3 = \vec{w}_1 + 2\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

c) $\vec{z} = \vec{v} - \mathrm{proj}_W(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Remarque : $\vec{v} = \mathrm{proj}_W(\vec{v})$ *équivaut à* $\vec{v} \in W$.

d) On forme la matrice U *contenant les vecteurs* $\vec{w}_1$, $\vec{w}_2$, *et* $\vec{w}_3$ *normalisés, i.e.*

$$U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 2/\sqrt{10} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -2/\sqrt{10} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{10} \end{pmatrix}.$$

La matrice associée à la projection est donnée par

$$UU^T = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 9 & -2 & 1 & 2 \\ -2 & 6 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 9 & -2 \\ 2 & 4 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Si on veut gagner du temps, il n'est pas nécessaire de calculer les coefficients en dessous de la diagonale puisque UU^T *est une matrice symétrique.*

Même question pour $\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. (Trouver la matrice associée à la projection peut-être long !)

Sol.:

a) Les vecteurs $\vec{w}_1, \vec{w}_2$ *sont orthogonaux :* $\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_2 = 0$.

b)

$$\mathrm{proj}_W(\vec{v}) = \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}_1}{\vec{w}_1\cdot\vec{w}_1}\vec{w}_1 + \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}_2}{\vec{w}_2\cdot\vec{w}_2}\vec{w}_2 = \frac{2}{7}\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 2/7 \\ 4/7 \\ 6/7 \end{pmatrix}.$$

c) $\vec{z} = \vec{v} - \mathrm{proj}_W(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 5/7 \\ -4/7 \\ 1/7 \end{pmatrix}$.

d) On forme la matrice U *contenant les vecteurs* $\vec{w}_1$, *et* $\vec{w}_3$ *normalisés, i.e.*

$$U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{13} & 2/\sqrt{12} \\ 2/\sqrt{13} & 2/\sqrt{12} \\ 3/\sqrt{13} & -2/\sqrt{12} \end{pmatrix}.$$

La matrice associée à la projection est donnée par

$$UU^T = \frac{1}{156}\begin{pmatrix} 64 & 76 & -16 \\ 76 & 100 & 20 \\ -16 & 20 & 160 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5 (Gram-Schmidt)

Appliquer la méthode de Gram-Schmidt pour trouver des bases orthogonales des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ suivants.

a) $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ base d'un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$, avec $\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ base d'un s.e.v. de $\mathbb{R}^4$, avec $\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

c) Donner une base orthonormale pour a) et b).

Sol.:

a) La méthode de Gram-Schmidt donne $\vec{u}_1 = \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$$\vec{u}_2 = \vec{w}_2 - \frac{\vec{w}_2 \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1}\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}.$$

b) La méthode de Gram-Schmidt donne $\vec{u}_1 = \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$$\vec{u}_2 = \vec{w}_2 - \frac{\vec{w}_2 \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1}\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 0 \\ 1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix},$$

$$\vec{u}_3 = \vec{w}_3 - \frac{\vec{w}_3 \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1}\vec{u}_1 - \frac{\vec{w}_3 \cdot \vec{u}_2}{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2}\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -1/5 \\ 2/5 \\ -2/5 \\ -1/5 \end{pmatrix}.$$

c) Pour a) : $\vec{u}_1/\|\vec{u}_1\| = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2/\|\vec{u}_2\| = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Pour b) : $\vec{u}_1/\|\vec{u}_1\| = \dfrac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2/\|\vec{u}_2\| = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_3/\|\vec{u}_3\| = \dfrac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 6 (VF)

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

V F

a) Soit $\|.\|$ la norme euclidienne. Alors pour un vecteur $\vec{v}$, $\|c\vec{v}\| = c\,\|\vec{v}\|$ quel que soit le scalaire c. ☐ ☐

b) Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\,\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| + \|\vec{v}\|^2 .$$

☐ ☐

c) Si un vecteur $\vec{v}$ est orthogonal à tous les vecteurs sauf un d'une base d'un sous-espace W, alors $\vec{v}$ appartient à $W^{\perp}$. ☐ ☐

d) Soit W un sous-ensemble d'un espace vectoriel V. Si la dimension de l'espace $W^{\perp}$ est égale à 1, alors on peut trouver une base de V formée par des vecteurs de W. ☐ ☐

Sol.: *Faux : a), b), c), d).*

Exercice 7 (VF)

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

V F

a) Une base d'un sous-espace vectoriel W de $\mathbb{R}^n$ qui est un ensemble de vecteurs orthogonaux est appelée une base orthonormale. ☐ ☐

b) Un ensemble $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$ orthogonal de vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^n$ est linéairement indépendant et de ce fait est une base du sous-espace qu'il engendre. ☐ ☐

c) Une base orthonormale est une base orthogonale mais la réciproque est fausse en général. ☐ ☐

d) Si $\vec{x}$ n'appartient pas au sous-espace vectoriel W, alors $\vec{x} - \vec{p}_W(\vec{x})$ n'est pas nul. ☐ ☐

Sol.: *Vrai : b), c), d). Faux : a).*

Exercice 8 (QR)

Calculer la décomposition QR des matrices suivantes.

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$,

c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Sol.:

a) On applique la méthode de Gram-Schmidt aux colonnes de la matrice A, i.e. aux vecteurs $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ *et* $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, *puis on les normalise. On obtient* $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ *et* $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$, *d'où* $Q = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 2/3 & 2/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$, *et* $R = Q^T A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 5/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{6}/3 & \sqrt{6}/3 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Si on veut éviter de faire des calculs avec de racines carrées différentes, on peut utiliser l'astuce suivante : Soit

$$W = \begin{pmatrix} \vec{w}_1 & \vec{w}_2 & \vec{w}_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

la matrice dont les colonnes sont les vecteurs orthogonaux obtenus avec le procédé de Gram-Schmidt. La matrice Q est obtenue à partir de W où chaque vecteur (colonne) est multiplié par l'inverse de leur norme, i.e.

$$Q = WD, \quad Q = \begin{pmatrix} \vec{w}_1 & \vec{w}_2 & \vec{w}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Ainsi pour trouver

$$R = Q^T A = D^T W^T A = D(W^T A)$$

on préférera d'abord multiplier $W^T A$, qui nous donnera encore une matrice triangulaire supérieure, puis effectuer la multiplication par D qui cette fois multipliera les lignes (car multiplication à gauche), i.e.

$$\begin{aligned} R &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On évitera donc de (perdre du temps à) calculer les coefficients qui sont en dessous de la diagonale.

c) $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 3/\sqrt{22} \\ 0 & -2/\sqrt{22} \\ -1/\sqrt{2} & 3/\sqrt{22} \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{11/2} \end{pmatrix}$.

Exercice 9 (QR et moindres carrés)

Déterminer la solution au sens des moindres carrés de $A\vec{x} = \vec{b}$

1. en utilisant l'équation normale lorsque

   (a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$,

   (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

   (c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$;

2. en utilisant la méthode QR lorsque

   (a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

   (b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Sol.:

1. *En utilisant l'équation normale.*

   (a) L'équation normale $A^T A\hat{x} = A^T\vec{b}$ est $\begin{pmatrix} 12 & 8 \\ 8 & 10 \end{pmatrix} \hat{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}$, elle a pour solution $\hat{x} = \begin{pmatrix} 5/14 \\ 5/7 \end{pmatrix}$.

   (b) $A^T A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}$, $A^T\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 14 \end{pmatrix}$, $\hat{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (c) $A^T A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $A^T\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 14 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\hat{x} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 14/3 \\ -5/3 \end{pmatrix}$.

2. *En utilisant la méthode QR.*

   (a) Les colonnes de la matrice A sont linéairement indépendantes, donc décomposer A selon $A = QR$ et résoudre $R\vec{x} = Q^T\vec{b}$ est équivalent à résoudre l'équation normale. La décomposition est donnée par

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 3/\sqrt{22} \\ 0 & -2/\sqrt{22} \\ -1/\sqrt{2} & 3/\sqrt{22} \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{11/2} \end{pmatrix}.$$

L'approximation $\hat{x}$ au sens des moindres carrés est la solution du système $R\hat{x} = Q^T\vec{b}$, où $Q^T\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2/\sqrt{22} \end{pmatrix}$. Ainsi, $\hat{x} = \begin{pmatrix} 1/11 \\ -2/11 \end{pmatrix}$.

(b) *Ici de même, les colonnes de la matrice A sont linéairement indépendantes, donc décomposer A selon $A = QR$ et résoudre $R\vec{x} = Q^T\vec{b}$ est équivalent à résoudre l'équation normale. La décomposition est donnée par*

$$Q = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 2/3 & 2/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On trouve $Q^T\vec{b} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$, $\hat{x} = \begin{pmatrix} 11/9 \\ -2/3 \end{pmatrix}$.

Exercice 10 (Matrices orthogonales)

a) Montrer que si Q est une matrice orthogonale, alors Q^T est aussi une matrice orthogonale. (Que peut-on déduire sur les lignes de Q ?)

b) Montrer que si U, V sont des matrices $n \times n$ orthogonales, alors UV est aussi une matrice orthogonale.

c) Montrer que toute valeur propre réelle λ d'une matrice orthogonale Q vérifie $\lambda = \pm 1$.

d) Soit Q une matrice orthogonale de taille $n \times n$. Soit $\{\vec{w}_1, ..., \vec{w}_n\}$ une base orthogonale de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\{Q\vec{w}_1, ..., Q\vec{w}_n\}$ est aussi une base orthogonale de $\mathbb{R}^n$.

Sol.:

Rappelons qu'une matrice $U \in M_{n\times n}$ est orthogonale si et seulement si $U^TU = I_n$. Dans ce cas $U^{-1} = U^T$.

a) Si Q est orthogonale alors $Q^TQ = I_n$, et dans ce cas $Q^{-1} = Q^T$. Pour conclure que Q^T est orthogonale, on doit vérifier $(Q^T)^TQ^T = I_n$. En effet,

$$(Q^T)^TQ^T = QQ^T = QQ^{-1} = I_n.$$

Cela nous dit que les lignes d'une matrice orthogonale forme aussi une famille orthonormale.

b) Nous devons vérifier que $(UV)^TUV = I_n$. En effet,

$$(UV)^TUV = V^TU^TUV = V^TI_nV = I_n.$$

c) La matrice orthogonale conserve la norme de tout vecteur $\vec{x}$: $\|Q\vec{x}\|^2 = (Q\vec{x})^T(Q\vec{x}) = \vec{x}^TQ^TQ\vec{x} = \vec{x}^T\vec{x} = \|\vec{x}\|^2$. Ensuite, si $\vec{x} \neq \vec{0}$ est un vecteur propre associé à λ, on a $\|\vec{x}\| = \|Q\vec{x}\| = \|\lambda\vec{x}\| = |\lambda|\,\|\vec{x}\|$. Comme $\|\vec{x}\| \neq 0$, on obtient $|\lambda| = 1$, ainsi $\lambda = \pm 1$.

d) *On calcule pour tous i, j :*

$$Q\vec{w}_i \cdot Q\vec{w}_j = (Q\vec{w}_i)^T Q\vec{w}_j = \vec{w}_i^T Q^T Q\vec{w}_j = \vec{w}_i^T \vec{w}_j = \vec{w}_i \cdot \vec{w}_j.$$

Comme les $\vec{w}_i$ sont orthogonaux entre eux, ceci montre que la famille $\{Q\vec{w}_1, ..., Q\vec{w}_n\}$ est orthogonale et constituée de vecteurs non nuls (de normes $\|Q\vec{w}_i\| = \|\vec{w}_i\|$).
Il reste à montrer que $\{Q\vec{w}_1, ..., Q\vec{w}_n\}$ est une base.
Méthode 1 : *Comme Q est inversible (d'inverse Q^T), Q transforme les bases en bases, donc $\{Q\vec{w}_1, ..., Q\vec{w}_n\}$ est une base.*
Méthode 2 : *Comme la famille $\{Q\vec{w}_1, ..., Q\vec{w}_n\}$ est orthogonale et constituée de vecteurs non nuls, elle est automatiquement linéairement indépendante. Comme elle comporte n vecteurs, c'est une base de $\mathbb{R}^n$.*
Remarque : si $\{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n\}$ est une base orthonormée, alors $\|Q\vec{u}_i\| = 1$, et $\{Q\vec{u}_1, ..., Q\vec{u}_n\}$ est aussi une base orthonormée.

Exercice 11 (Gram-Schmidt)

Soit $V = C[-1,1] = \{f : [-1,1] \to \mathbb{R}; f \text{ continue}\}$. On munit V du produit scalaire

$$(f|g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\, dt.$$

Déterminer une base orthonormale du sous-espace vectoriel de V suivant :

$$\mathbb{P}_2 = \text{span}\left\{1, t, t^2\right\}.$$

Sol.: *On considère la base canonique $p_1 = 1$, $p_2 = t$, $p_3 = t^2$ de $\mathbb{P}_2$. La méthode de Gram-Schmidt permet d'orthonormaliser cette base pour obtenir la base q_1, q_2, q_3 cherchée.*
On peut déjà poser $q_1 = \frac{p_1}{\|p_1\|} = \boxed{\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$, en utilisant la norme $\|f\| = \sqrt{(f|f)}$. Pour calculer q_2 on calcule produit scalaire $(p_2|q_1) = \int_{-1}^{1} t \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$. Comme p_2 est déjà orthogonal à q_1, il suffit de le normaliser. On a donc $q_2 = \frac{p_2}{\|p_2\|} = \boxed{\dfrac{t}{\sqrt{2/3}}}$. Enfin, il reste à déterminer q_3. On a les produits scalaires $(p_3|q_1) = \int_{-1}^{1} t^2 \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$ et $(p_3|q_2) = \int_{-1}^{1} t^2 \sqrt{\frac{3}{2}} t = 0$. Soit $W_2 = span\{q_1, q_2\}$. On calcule

$$proj_{W_2} p_3 = \frac{(p_3|q_1)}{(q_1|q_1)} q_1 + \frac{(p_3|q_2)}{(q_2|q_2)} q_2 = \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{3}.$$

On a donc $\tilde{q}_3 = p_3 - proj_{W_2} p_3 = t^2 - \frac{1}{3}$. Ainsi, $q_3 = \frac{\tilde{q}_3}{\|\tilde{q}_3\|} = \boxed{\sqrt{\dfrac{45}{8}}\left(t^2 - \dfrac{1}{3}\right)}$.

(Remarque : On pourrait continuer ainsi et obtenir pour tout n une base de $\mathbb{P}_n$ orthogonale pour ce produit scalaire. Avec une normalisation différente, ces polynômes s'appelle alors les polynômes de Legendre.)

Exercice 12 (Noyau, rang et transposée)

Soit $A \in M_{m\times n}$. Montrer que $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(A^T A)$.

Sol.: *Si $A\vec{x} = \vec{0}$, alors $A^T A\vec{x} = \vec{0}$, ce qui montre* $\mathrm{Ker}(A) \subset \mathrm{Ker}(A^T A)$. *Soit maintenant $\vec{x}$ tel que $A^T A\vec{x} = \vec{0}$, alors $\vec{x}^T A^T A\vec{x} = 0$. Or, $\vec{x}^T A^T A\vec{x} = (A\vec{x})^T(A\vec{x}) = \|A\vec{x}\|^2$. Ainsi, $A\vec{x} = \vec{0}$, et* $\mathrm{Ker}(A^T A) \subset \mathrm{Ker}\,A$. *D'où l'égalité.*

a) En déduire que les colonnes de A sont linéairement indépendantes si et seulement si $A^T A$ est inversible.

Sol.: *Les colonnes de $A = (\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_n)$ sont linéairement indépendantes*

$$\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow \Big(\beta_1\vec{a}_1 + \ldots + \beta_n\vec{a}_n = \vec{0} \;\Rightarrow\; \beta_1 = \ldots = \beta_n = 0\Big)\\
&\Longleftrightarrow \left(A \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \vec{0} \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \vec{0} \right)\\
&\Longleftrightarrow \mathrm{Ker}\,A = \{\vec{0}\}.
\end{aligned}$$

Ainsi, les colonnes de A sont linéairement indépendantes si est seulement si $\mathrm{Ker}(A) = \{\vec{0}\}$, *et d'après a), si et seulement si* $\mathrm{Ker}(A^T A) = \{\vec{0}\}$, *c'est-à-dire la matrice (carrée) $A^T A$ est inversible, par le théorème de caractérisation des matrices inversibles.*

b) En déduire que $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(A^T A)$.

Sol.: *Rappelons que pour une matrice $A \in M_{m\times n}$, le théorème du rang garantit que*

$$\mathrm{rang}(A) + \dim \mathrm{Ker}(A) = n,$$

où $\mathrm{rang}(A) := \dim \mathrm{Im}(A)$. *Appliqué à la matrice $A^T A \in M_{n\times n}$, nous obtenons*

$$\mathrm{rang}(A^T A) + \dim \mathrm{Ker}(A^T A) = n = \mathrm{rang}(A) + \dim \mathrm{Ker}(A).$$

Comme $\mathrm{Ker}(A^T A) = \mathrm{Ker}(A)$, *on conclut que* $\mathrm{rang}(A^T A) = \mathrm{rang}(A)$.

Exercice 13 (Valeurs propres)

(a) Montrer que la matrice de rotation

$$R = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

où α est un réel quelconque, est orthogonale. Calculer $\det R$, les valeurs propres et des vecteurs propres correspondants.

(b) Montrer que la matrice de réflexion

$$U = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

est orthogonale. Calculer $\det U$, les valeurs propres et des vecteurs propres correspondants.

(c) Montrer que toute matrice $n \times n$ de la forme $Q = I_n - 2\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{u}^T$, où $\overrightarrow{u}$ est un vecteur unitaire (de longueur 1) de $\mathbb{R}^n$, est orthogonale. Ces matrices sont appelées matrices de réflexion élémentaires. A l'aide d'un raisonnement géométrique, déterminer les valeurs propres et les espaces propres correspondants.

Sol.:

(a) On vérifie que $RR^T = I$, c'est-à-dire que $R^{-1} = R^T$, et R est une matrice orthogonale avec $\det R = 1$. Les valeurs propres sont $1, \cos\alpha \pm i \sin\alpha$ et une base de vecteurs propres est donnée par exemple par

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(b) $UU^T = I$, et donc U est une matrice orthogonale, $\det U = -1$. Les valeurs propres sont 1 (avec multiplicité algébrique 2) et -1. Des vecteurs propres correspondants sont

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \text{et} \ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(c) On a

$$Q^T = I_n^T - 2(\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{u}^T)^T = I_n - 2\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{u}^T,$$

et donc

$$QQ^T = (I_n - 2\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{u}^T)(I_n - 2\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{u}^T) = I_n - 4\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{u}^T + 4\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{u}^T\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{u}^T.$$

Or

$$\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{u}^T\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{u}^T = \overrightarrow{u}(\overrightarrow{u}^T\overrightarrow{u})\overrightarrow{u}^T = \overrightarrow{u} \cdot 1 \cdot \overrightarrow{u}^T = \overrightarrow{u}\,\overrightarrow{u}^T,$$

d'où $QQ^T = I_n$, et Q est une matrice orthogonale.
Cette matrice de réflexion élémentaire aura pour valeurs propres 1 et -1 et si notre intuition géométrique est correcte, il y aura une droite renversée par Q et un hyperplan de dimension $n-1$ fixé par Q.
On a, puisque $\overrightarrow{u}^T\overrightarrow{u} = 1$,

$$Q\overrightarrow{u} = (I_n - 2\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{u}^T)\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u} - 2\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{u}^T\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u} - 2\overrightarrow{u} = -\overrightarrow{u}.$$

Donc, $\overrightarrow{u}$ est un vecteur propre pour la valeur propre -1. Pour un vecteur $\overrightarrow{v}$ orthogonal à $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{u}^T\overrightarrow{v} = 0$ et on obtient

$$Q\overrightarrow{v} = (I_n - 2\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{u}^T)\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} - 2\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{u}^T\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}.$$

Comme il y a $(n-1)$ vecteurs linéairement indépendants et orthogonaux à $\overrightarrow{u}$, Q possède un espace propre E_1 de dimension $(n-1)$.
Remarque. *La matrice U du point précédent est un cas particulier de matrice de réflexion élémentaire, avec $n = 3$ et*

$$\overrightarrow{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 14 (VF)

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

a) Soit A une matrice $n \times n$ qui peut se factoriser selon la factorisation QR comme $A = QR$. Alors, $Q^T A = R$.

b) Soit W un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Soit $\hat{\vec{y}}$ la projection orthogonale de $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ sur W. Alors $\hat{\vec{y}}$ dépend du choix de la base de W.

c) Soit W un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, tel que $W = \text{Vect}\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$. Si $\vec{z} \in \mathbb{R}^n$ satisfait $\vec{z} \perp \vec{w}_1$ et $\vec{z} \perp \vec{w}_2$, alors $\vec{z} \in W^\perp$.

d) Soit W un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Si $\vec{y} \in W$, alors sa projection orthogonale sur W est $\vec{p}_W(\vec{y}) = \vec{y}$.

Sol.: *Vrai : a), c), d). Faux : b).*

Exercice 15 (Produit scalaire et inégalités)

Soient $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\| \cdot \|$ la norme usuelle définie à partir du produit scalaire usuel $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ (aussi appelée norme euclidienne) :

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} = \sqrt{v_1^2 + \ldots + v_n^2}$$

Prouver les propriétés suivantes :

a) $\|\vec{v}\| \geq 0$

b) $\|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$

c) $\|\alpha \vec{v}\| = |\alpha| \|\vec{v}\|$

d) $|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leq \|\vec{v}\| \|\vec{u}\|$ (*Inégalité de Cauchy-Schwarz*).

e) $\|\vec{v} + \vec{u}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{u}\|$ (*Inégalité du triangle*)

Indication : pour l'inégalité de Cauchy-Schwarz, poser $\|\vec{u} + t\vec{v}\|^2$ et étudier $P(t_0)$ avec $t_0 = -\dfrac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{v}\|^2}$.

Sol.:

a) évident

b) évident

c) On montre que $\|\alpha \vec{v}\|^2 = \alpha^2 \|\vec{v}\|^2$. Par l'exercice précédant, on sait que

$$\|\alpha \vec{v}\|^2 = \langle \alpha \vec{v}, \alpha \vec{v} \rangle = \alpha^2 \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = \alpha^2 \|\vec{v}\|^2.$$

d) Si $\vec{v} = \vec{0}$ alors l'inégalité est vraie (c'est même une égalité). On suppose alors que $\vec{v} \neq \vec{0}$. On a

$$P(t) = \|\vec{u} + t\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2t\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + t^2 \|\vec{v}\|^2.$$

On a que $P(t) \geq 0$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, donc pour $t = t_0$ on a

$$\begin{aligned} 0 \leq P(t_0) &= \|\vec{u}\|^2 - 2\frac{\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle^2}{\|\vec{v}\|^2} + \frac{\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle^2}{\|\vec{v}\|^4}\|\vec{v}\|^2 \\ &= \|\vec{u}\|^2 - \frac{\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle^2}{\|\vec{v}\|^2} \end{aligned}$$

Ainsi $\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle^2 \leq \|u\|^2\|v\|^2$ et, en prenant la racine de part et d'autre on obtient l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

e)

$$\begin{aligned} \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 &= \langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{v}\rangle \\ &= \langle \vec{u}, \vec{u}\rangle + 2\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle + \langle \vec{v}, \vec{v}\rangle \\ &= \|\vec{u}\|^2 + 2\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle + \|\vec{v}\|^2 \\ &\leq \|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| + \|\vec{v}\|^2 \\ &= (\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2, \end{aligned}$$

où on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz.