Série 11 (Corrigé)

Exercice 1 (Valeur propre)

a) Montrer que si λ est une valeur propre d'une matrice inversible A de taille $n \times n$, alors λ^{-1} est une valeur propre de A^{-1}. Trouver un vecteur propre correspondant.

b) Montrer que A et A^T ont le même polynôme caractéristique, et donc les mêmes valeurs propres. Montrer par un contre-exemple que les vecteurs propres de A et A^T ne sont pas les mêmes en général.

Sol.:

a) Si $\vec{v}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ, on a

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}.$$

La valeur propre λ est non nulle car la matrice A est inversible. On multiplie à gauche par $\lambda^{-1}A^{-1}$, et on obtient

$$\lambda^{-1}\vec{v} = A^{-1}\vec{v},$$

d'où le résultat.

b) Le déterminant de la matrice $A - \lambda I_n$ étant égal au déterminant de la transposée $(A - \lambda I_n)^T = A^T - \lambda I_n$, les matrices A et A^T ont donc le même polynôme caractéristique, et donc les mêmes valeurs propres (qui sont les racines du polynôme caractéristique).
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres sont $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1$ et les vecteurs propres associés sont $\vec{v}_1 = (2\ \ 1)^T, \vec{v}_2 = (-2\ \ 1)^T$. Par contre les vecteurs propres correspondants de la matrice A^T sont $\vec{v}_1 = (1\ \ 2)^T, \vec{v}_2 = (-1\ \ 2)^T$.
Remarque : bien sûr, si A est symétrique, les vecteurs propres de A et A^T sont les mêmes.

Exercice 2 (Valeurs et vecteurs propres)

Soit A une matrice 3×3 et a un nombre réel. On suppose que

$$a_{11} + a_{12} + a_{13} = a_{21} + a_{22} + a_{23} = a_{31} + a_{32} + a_{33} = a$$

Calculer $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et conclure que a est une valeur propre de A.

Sol.: *Calculons donc*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+a_{12}+a_{13} \\ a_{21}+a_{22}+a_{23} \\ a_{31}+a_{32}+a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On en conclut que a est une valeur propre de A puisque $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *est un vecteur propre.*

Exercice 3 (Diagonalisation)

Parmi les matrices suivantes, indiquer celles qui sont diagonalisables (toujours en justifiant), et le cas échéant, diagonaliser ces matrices et exhiber les vecteurs propres.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sol.:

— *A n'est pas diagonalisable. Ses valeurs propres sont : $-2, -2, 1$. La dimension de l'espace propre pour $\lambda = -2$ est seulement 1 alors que la multiplicité est 2.*

— *B est diagonalisable. En effet, les valeurs propres sont distinctes :*

$$2, 1, \frac{1}{2}\left(7+\sqrt{13}\right), \frac{1}{2}\left(7-\sqrt{13}\right).$$

On voit facilement que $\vec{v}_1 = (1\ 0\ 0\ 0)^T$ et $\vec{v}_2 = (0\ 1\ 0\ 0)^T$ sont des vecteurs propres associés aux valeurs propres $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$. Les vecteurs propres pour $\lambda_3 = \frac{1}{2}\left(7+\sqrt{13}\right)$ et $\lambda_4 = \frac{1}{2}\left(7-\sqrt{13}\right)$ sont

$$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -2+\sqrt{13} \\ \frac{1}{6}\left(-17+7\sqrt{13}\right) \\ 1 \\ \frac{1}{2}(-1+\sqrt{13}) \end{pmatrix}, \qquad \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} -2-\sqrt{13} \\ \frac{1}{6}\left(-17-7\sqrt{13}\right) \\ 1 \\ \frac{1}{2}(-1-\sqrt{13}) \end{pmatrix}.$$

Maintenant, si $\widetilde{D} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ et $P = (\vec{v}_1\ \vec{v}_2\ \vec{v}_3\ \vec{v}_4)$, on a $B = P\widetilde{D}P^{-1}$.

— *C est diagonalisable. Valeurs propres : $5, 5, -3, -3$.*
Vecteurs propres associés : $\vec{v}_1 = (-16\ 4\ 0\ 1)^T, \vec{v}_2 = (-8\ 4\ 1\ 0)^T, \vec{v}_3 = (0\ 0\ 1\ 0)^T$, $\vec{v}_4 = (0\ 0\ 0\ 1)^T$.
Remarque : les vecteurs propres $(0\ 0\ 1\ 0)^T, (0\ 0\ 0\ 1)^T$ étaient faciles à deviner.
Maintenant, si $\widetilde{D} = \mathrm{diag}(5, 5, -3, -3)$ et $P = (\vec{v}_1\ \vec{v}_2\ \vec{v}_3\ \vec{v}_4)$, on a $C = P\widetilde{D}P^{-1}$.

— *D est diagonalisable. Valeurs propres : $5, 5, 4$.*
Vecteurs propres associés : $\vec{v}_1 = (-2\ 0\ 1)^T, \vec{v}_2 = (0\ 1\ 0)^T, \vec{v}_3 = (-1\ 2\ 0)^T$.
Remarque : le vecteur propre $(0\ 1\ 0)^T$ était facile à deviner.
Maintenant, si $\widetilde{D} = \mathrm{diag}(5, 5, 4)$ et $P = (\vec{v}_1\ \vec{v}_2\ \vec{v}_3)$, on a $D = P\widetilde{D}P^{-1}$.

— *E n'est pas diagonalisable. Valeurs propres : $0, 0$. La dimension de l'espace propre associé à $\lambda = 0$ est seulement 1.*

Exercice 4 (Diagonalisation)

Existe t-il une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $b \neq 0$, diagonalisable et ne possédant qu'une seule valeur propre de multiplicité algébrique 2 ?

Sol.: *Non. En effet, soit A une matrice diagonalisable avec une seule valeur propre λ de multiplicité 2. Diagonalisons la matrice : il existe P inversible telle que*

$$A = PDP^{-1}$$

avec $D = \lambda I_2$. On déduit $A = \lambda P I_2 P^{-1} = \lambda P P^{-1} = \lambda I_2$. La matrice A est donc proportionnelle à la matrice identité, elle ne peut pas être de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $b \neq 0$.

Exercice 5 (Matrice d'application)

Soit $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices symétriques de taille 2×2, dont une base est donnée par $\mathcal{B} = \{S_1, S_2, S_3\}$ où

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad S_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

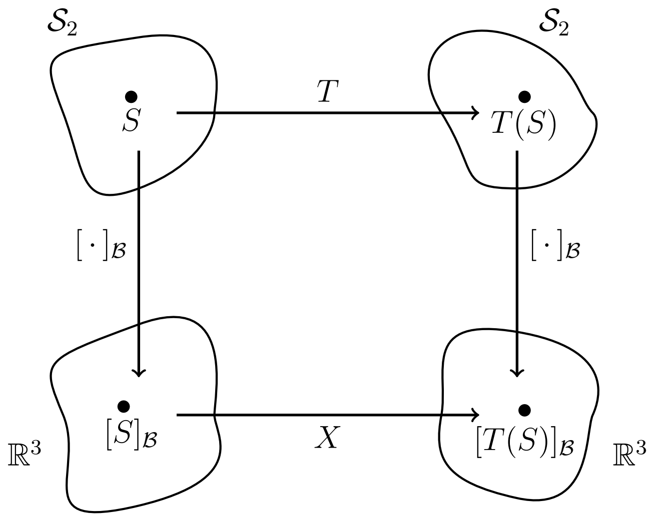
Soit $T : \mathcal{S}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ la transformation linéaire définie par

$$T \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a - d & -b \\ -b & -a + 2d \end{pmatrix}.$$

a) Calculer les 3 valeurs propres (distinctes) $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ de T.
b) Trouver un vecteur propre $M_i \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ associé à chaque λ_i. Montrer que $\mathcal{B}' = \{M_1, M_2, M_3\}$ est une base de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$.
c) Ecrire la matrice de T par rapport à la base $\mathcal{B}'$.
d) Calculer $T^{10}(A)$, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Indication : On s'aidera de la matrice $[T]_{\mathcal{B}}$ associée à l'application T.

Sol.: *On cherche à trouver $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $T(S) = \lambda S$, pour S symétrique. Or pour résoudre cela, on aimerait avoir une matrice pour pouvoir calculer ses valeurs propres comme on a* l'habitude de faire. On calcule alors la matrice de l'application T dans la base $\mathcal{B}$. Voila un schéma et une explication de pourquoi.



On aura $[T(S)]_{\mathcal{B}} = X[S]_{\mathcal{B}}$ où X est la matrice qui représente T dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}$ (elle sera 3×3). Par définition, la matrice X est donnée par

$$X = \left([T(S_1)]_{\mathcal{B}} \quad [T(S_2)]_{\mathcal{B}} \quad [T(S_3)]_{\mathcal{B}}\right)$$

Si $T(S) = \lambda S$ on a $[T(S)]_{\mathcal{B}} = \lambda[S]_{\mathcal{B}}$ car $[\,\cdot\,]_{\mathcal{B}}$ est linéaire. Donc, en combianant les deux égalités pour $[T(S)]_{\mathcal{B}}$ on obtient que : trouver les valeurs propres de T est équivalent à trouver les valeurs propres de la matrice X. On doit alors trouver λ tel que $X[S]_{\mathcal{B}} = \lambda[S]_{\mathcal{B}}$.

Par contre les vecteurs propres obtenus seront des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et il faudra utiliser la définition de $[\,\cdot\,]_{\mathcal{B}}$ pour trouver les matrices associées aux valeurs propres obtenues.

On calcule les images des différents vecteurs de base :

$$T(S_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad T(S_2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T(S_3) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Puis on cherche les coefficients de $T(S_i)$ dans la base $\mathcal{B}$. Ceci nous donnera les colonnes de la matrice de l'application T par rapport à la base $\mathcal{B}$:

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) On calcule :

$$\det\Big(X - \lambda \cdot I_3\Big) = (2-\lambda)^2 \cdot (-1-\lambda) - (1-\lambda) = -(\lambda-1)\cdot(\lambda+1)\cdot(\lambda-3).$$

Ainsi, on a $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ et $\lambda_3 = 3$.

b) On cherche les différents espaces propres. Pour $\lambda = 1$, on cherche donc les matrices A symétriques telles que $T(A) = A$. Il s'agit donc de calculer le noyau de $X - I_3$. On *trouve une droite engendrée par le vecteur* $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, *qui représente la matrice symétrique* $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, *en coordonnées dans la base* $\mathcal{B}$.

De même, pour $\lambda = -1$, *on trouve* $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *(on aurait pu le deviner, puisque* $T(S_2) = -S_2$*).*

Finalement, pour la dernière valeur propre 3, *on trouve* $M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

On sait que trois vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont linéairement indépendants (vous pouvez aussi le vérifier à la main). Comme l'espace des matrices symétriques de taille 2 *est de dimension* 3, *il s'agit d'une base.*

c) *Par un théorème du cours, on sait que la matrice diagonale avec les valeurs propres sur la diagonale est la matrice qui représente l'application* T *dans la base formée de vecteurs propres* $[M_i]_{\mathcal{B}}$. *Il suffit de placer les valeurs propres dans l'ordre choisi dans la diagonale :* $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

On peut aussi utiliser la définition de la matrice qui représente T *dans la base* $\mathcal{B}'$ *formée de vecteurs propres*

$$D = ([T(M_1)]_{\mathcal{B}'} \quad [T(M_2)]_{\mathcal{B}'} \quad [T(M_3)]_{\mathcal{B}'})$$

Si on combine le tout on aura

$$X = ([M_1]_{\mathcal{B}} \quad [M_2]_{\mathcal{B}} \quad [M_2]_{\mathcal{B}}) D ([M_1]_{\mathcal{B}} \quad [M_2]_{\mathcal{B}} \quad [M_2]_{\mathcal{B}})^{-1}$$

et on voit que nous avons fait une diagonalistion de X.

d) *On remarque que l'on peut écrire*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot M_1 + 2 \cdot M_2 + (-1) \cdot M_3,$$

c'est-à-dire que les coordonnées de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ *dans la base* $\mathcal{B}'$ *sont* $(2, 2, -1)$. *Ainsi les composantes de* $T^{10}(A)$ *dans la base* $\mathcal{B}'$ *sont :*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{10} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1^{10} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3^{10} \end{pmatrix}.$$

Finalement, on a

$$T^{10}(A) = 2 \cdot M_1 + 2 \cdot M_2 + (-3^{10}) M_3 = \begin{pmatrix} 2 - 3^{10} & 2 \\ 2 & 2 + 3^{10} \end{pmatrix}.$$

Exercice 6 (Rang)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer le rang de A et la dimension du noyau de A.

b) Même question pour A^T.

c) On suppose qu'une matrice A de taille 7×7 possède un pivot dans chaque ligne. Quel est le rang de A ? Quelle est la dimension du noyau de A ?

d) On considère une matrice A de taille $m \times n$ et un vecteur $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$. Quelle doit être la relation entre le rang de $[\,A\ \vec{b}\,]$ et le rang de A pour que l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ soit compatible ?

Sol.:

a) Les colonnes 1, 2 *et* 4 *forment une base de* $\mathbb{R}^3$*, donc* $\operatorname{rg}(A) = 3$*. Par le théorème du rang, on a*

$$\dim \operatorname{Ker} A = (\text{nombre de colonnes de } A) - \operatorname{rg}(A) = 4 - 3 = 1.$$

b) $\operatorname{rg}(A^T) = \operatorname{rg}(A) = 3$.

$$\dim \operatorname{Ker} A^T = (\text{nombre de colonnes de } A^T) - \operatorname{rg}(A^T) = 3 - 3 = 0.$$

c) A est équivalente à la matrice identité de taille 7×7*, ainsi* $\operatorname{rg}(A) = 7$ *et* $\dim \operatorname{Ker} A = 0$.

d) $A\vec{x} = \vec{b}$ *est compatible* $\Leftrightarrow$ $\vec{b}$ *est une combinaison linéaire des colonnes de* $A \Leftrightarrow \vec{b} \in \operatorname{Col} A \Leftrightarrow \operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}([\,A\ \vec{b}\,])$.

Exercice 7 (Produit scalaire)

Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.

b) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$.

c) $(\alpha\vec{u}) \cdot \vec{v} = \alpha\,(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (\alpha\vec{v})$.

d) $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$ et $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0$ si et seulement si $\vec{u} = \vec{0}$.

Sol.:

a) On note $\vec{u} := \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ *et de même pour* $\vec{v}$ *et* $\vec{w}$*. Alors* $\vec{u} \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^n u_i v_i = \sum_{i=1}^n v_i u_i = \vec{v} \cdot \vec{u}$.

b) $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}=\sum_{i=1}^{n}(u_i+v_i)\,w_i=\sum_{i=1}^{n}u_iw_i+\sum_{i=1}^{n}v_iw_i=\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$.

c) $(\alpha\vec{u})\cdot\vec{v}=\sum_{i=1}^{n}(\alpha u_i)\,v_i=\alpha\sum_{i=1}^{n}u_iv_i=\alpha\,(\vec{u}\cdot\vec{v})=\sum_{i=1}^{n}u_i\,(\alpha v_i)=\vec{u}\cdot(\alpha\vec{v})$.

d) $\vec{u}\cdot\vec{u}=\sum_{i=1}^{n}u_i^2\geq 0$ *et* $\vec{u}\cdot\vec{u}=0$ *si et seulement si* $u_i=0$ *pour tout* i*, c-à-d* $\vec{u}=\vec{0}$.

Exercice 8 (Orthogonalité)

a) Trouver un vecteur non nul orthogonal à $\vec{z}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

b) Soient $\vec{u}=\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix}$, $\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$, $\vec{w}=\begin{pmatrix}5\\6\\0\end{pmatrix}$. Calculer

$$\vec{u}\cdot\vec{v},\quad \vec{v}\cdot\vec{w},\quad \frac{\vec{u}\cdot\vec{w}}{\|\vec{v}\|},\quad \frac{1}{\vec{w}\cdot\vec{w}}\vec{w},\quad \frac{\vec{u}\cdot\vec{w}}{\|\vec{v}\|}\vec{v}.$$

c) Calculer la distance entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et la distance entre $\vec{u}$ et $\vec{w}$.

d) Calculer les vecteurs unitaires correspondant à $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ (pointant dans la même direction que le vecteur original).

Sol.:

a) $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ *car* $\vec{z}\cdot\vec{x}=0$.

b) $\vec{u}\cdot\vec{v}=7$, $\vec{v}\cdot\vec{w}=10$, $\frac{\vec{u}\cdot\vec{w}}{\|\vec{v}\|}=\frac{39}{\sqrt{5}}$, $\frac{1}{\vec{w}\cdot\vec{w}}\vec{w}=\frac{1}{61}\begin{pmatrix}5\\6\\0\end{pmatrix}$, $\frac{\vec{u}\cdot\vec{w}}{\|\vec{v}\|}\vec{v}=\frac{39}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$.

c) $\|\vec{u}-\vec{v}\|=\sqrt{17}$, $\|\vec{u}-\vec{w}\|=3$.

d) $\tilde{\vec{u}}=\frac{1}{\sqrt{26}}\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix}$, $\tilde{\vec{v}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$, $\tilde{\vec{w}}=\frac{1}{\sqrt{61}}\begin{pmatrix}5\\6\\0\end{pmatrix}$.

Exercice 9 (L'orthogonal)

Soit $\vec{v}=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$. Donner l'ensemble W des vecteurs orthogonaux à $\vec{v}$. Est-ce un espace vectoriel ? Si oui, de quelle dimension ?

Sol.: $W=\left\{\vec{w}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\ \middle|\ \vec{v}\cdot\vec{w}=3a+2b+c=0\right\}$.

W est en fait le noyau de l'application linéaire $\vec{w} \mapsto \vec{v} \cdot \vec{w}$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$, et donc c'est un espace vectoriel. Cette application est non nulle (par exemple $\vec{v} \cdot \vec{v} > 0$) donc de rang 1. Par le théorème du rang, la dimension de W est donc $3 - 1 = 2$, il s'agit d'un plan (appelé le plan orthogonal au vecteur $\vec{v}$).

Exercice 10 (Valeurs propres)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Calculer ses valeurs propres.

Sol.: *On calcule le polynôme caractéristique et on obtient $p_\lambda(A) = \lambda^3(\lambda - 2)$. Ainsi les valeurs propres sont $\lambda = 0$ et $\lambda = 2$.*

Exercice 11 (Rang)

a) Montrer que les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -19 \\ 0 & 1 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{2} \end{pmatrix}$ sont équivalentes.

b) Calculer $\operatorname{rang}(A)$, $\dim \operatorname{Ker} A$, $\operatorname{rang}(B)$, $\dim \operatorname{Ker} B$.

c) Trouver une base de $\operatorname{Ker} A$ et $\operatorname{Ker} B$.

Sol.:

a) En échelonnant/réduisant la matrice A par des opérations élémentaires sur les lignes, on obtient la matrice B.

b) La matrice B est sous forme échelonnée réduite, on peut donc lire $\operatorname{rang}(B) = 3$ (trois pivots) et $\dim \operatorname{Ker} B = 1$. Comme A et B sont équivalentes d'après a), on a $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(B) = 3$ et $\dim \operatorname{Ker} A = \dim \operatorname{Ker} B = 1$.

c) Comme B est la forme échelonnée réduite de A, on a $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} B$, et une base de $\operatorname{Ker} B$ est aussi une base de $\operatorname{Ker} A$. $\operatorname{Ker} B$ est l'espace des solutions de $B\vec{x} = \vec{0}$, de dimension 1. On obtient ainsi la base $\left\{ \begin{pmatrix} 19 \\ -11 \\ \frac{7}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Exercice 12 (VF)

Soit A une matrice de taille $n \times n$. Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses (justifier).

V F

a) A est diagonalisable si et seulement si elle possède n valeurs propres distinctes. ☐ ☐

b) A est diagonalisable si A possède n vecteurs propres. ☐ ☐

c) Si A est diagonalisable, alors A est inversible. ☐ ☐

d) Si A est inversible, alors A est diagonalisable. ☐ ☐

e) Si 0 est valeur propre, alors $\operatorname{rang}(A) < n$. ☐ ☐

f) Pour tout matrice inversible P de taille $n \times n$, λ est une valeur propre de A si et seulement si λ est une valeur propre de $P^{-1}AP$. ☐ ☐

Sol.:

a) Faux. En effet la matrice identité est diagonale donc diagonalisable, et pourtant sa seule valeur propre est 1.

b) Faux. A doit posséder n vecteurs propres linéairement indépendants.

c) Faux. Méthode 1 : La matrice nulle est diagonalisable mais non inversible.

Méthode 2 : On peut aussi proposer la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *diagonale donc diagonalisable, mais non inversible.*

d) Faux (pour $n \geqslant 2$*). En effet, la matrice* $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *est inversible, mais non diagonalisable, car l'espace propre associé à la valeur propre* 1 *(de multiplicité* 2*) est de dimension seulement* 1.

e) Vrai. Si 0 *est valeur propre, la dimension du noyau est non nulle, et donc* $\operatorname{rang}(A) = n - \dim \operatorname{Ker} A < n$.

f) Vrai. A *et* $B = P^{-1}AP$ *sont semblables, donc elles ont les mêmes valeurs propres (avec les mêmes multiplicités).*
Remarque : si on note $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots$ *les vecteurs propres de* B*, alors les vecteurs propres de* A *sont* $P\vec{v}_1, P\vec{v}_2, \ldots$.

Exercice 13 (VF)

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

V F

a) Un espace propre d'une matrice carrée A est l'espace nul d'une certaine matrice. ☐ ☐

b) Soit A une matrice carrée. Si A^2 est la matrice nulle, alors la seule valeur propre de A est 0. ☐ ☐

c) Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont les éléments de sa diagonale principale. ☐ ☐

d) L'ensemble $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ des vecteurs propres associés aux valeurs propres distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ d'une matrice carrée A est linéairement dépendant. ☐ ☐

Sol.: *Vrai : a), b), c). Faux : d).*

Exercice 14 (QCM)

a. Soit A une matrice de taille 3×3 inversible et λ une valeur propre de A.

☐ Alors λ^{-1} est une valeur propre de $-A$.
☐ Alors λ est une valeur propre de $-A$.
☐ Alors λ^{-1} est une valeur propre de A^{-1}.
☐ Alors λ est une valeur propre de A^{-1}.

b. Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

☐ Alors seulement 6 est une valeur propre de A.
☐ Alors -6 et -4 sont valeurs propres de A.
☐ Alors 6 et 0 sont valeurs propres de A.
☐ Alors -4 et 6 sont valeurs propres de A.

c. Soit $\mathcal{B} = (1-t, 1+t, 1+t+t^2)$ et $\mathcal{C} = (1, t-\frac{1}{2}, t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4})$.

☐ Alors $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{P}_2$, mais pas $\mathcal{C}$.
☐ Alors $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{P}_2$, et $\mathcal{C}$ aussi.
☐ Alors $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{P}_2$, mais pas $\mathcal{B}$.
☐ Alors $\mathcal{B}$ n'est pas une base de $\mathbb{P}_2$, et $\mathcal{C}$ non plus.

d. Soit $\mathcal{B} = (1-t, 1+t, 1+t+t^2)$ et $\mathcal{C} = (1, t-\frac{1}{2}, t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4})$. Soit encore S la matrice de changement de base de B à C et soit T la matrice de changement de base de C à B.

☐ Alors $s_{13} = 0$ et $t_{23} = 0$.
☐ Alors $s_{13} = 9/16$ et $t_{23} = 3/2$.
☐ Alors $s_{13} = -1$ et $t_{23} = -3/4$.
☐ Alors $s_{13} = 3/2$ et $t_{23} = -9/8$.

e. Soit A une matrice de taille 2×2 qui n'est pas inversible. Alors

☐ 0 est une valeur propre de A.
☐ A est la matrice nulle.
☐ A n'a pas de valeur propre réelle.
☐ tout vecteur de $\mathbb{R}^2$ est un vecteur propre de A.

Sol.:

a. ☐ *Alors λ^{-1} est une valeur propre de A^{-1}.*

En effet, si $\overrightarrow{x}$ est un vecteur propre de la matrice A pour la valeur propre λ, on a $A\overrightarrow{x} = \lambda\overrightarrow{x}$. Multiplions cette égalité à gauche par la matrice inverse A^{-1} :

$$\overrightarrow{x} = A^{-1}A\overrightarrow{x} = A^{-1}\lambda\overrightarrow{x} = \lambda A^{-1}\overrightarrow{x}$$

Ainsi, en divisant par λ, on conclut que l'inverse de λ est une valeur propre de l'inverse de A, pour le même vecteur propre ! Il n'y a aucune raison pour que λ soit une valeur propre de A^{-1} et pour que λ ou λ^{-1} soit une valeur propre de $-A$. Pensons en effet à la matrice $2I$ dont la seule valeur propre est 2. Par contre, il est vrai que $-\lambda$ est une valeur propre de $-A$ puisque si $\overrightarrow{x}$ est un vecteur propre de A pour la valeur propre λ, alors $(-A)\overrightarrow{x} = -A\overrightarrow{x} = -\lambda\overrightarrow{x}$.

b. ☐ *Alors -4 et 6 sont valeurs propres de A.*

On voit que 6 est une valeur propre de A car $6 = 1 + 5$, voir exercices 5, 6 et 7. On voit aussi que -4 est valeur propre de A, car $1 - 5 = -4$, voir exercice 7. Comme les deux lignes de A ne sont pas colinéaires, le noyau de A est nul si bien que 0 n'est pas valeur propre, et -6 n'est pas valeur propre non plus car $A + 6I_2$ est de rang 2. Nous verrons bientôt qu'une matrice carrée de taille $n \times n$ ne peut avoir plus de n valeurs propres, nous aurions donc pu nous contenter d'observer que 6 et -4 sont valeurs propres pour éliminer les réponses 1, 2 et 3.

c. ☐ *Alors $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{P}_2$, et $\mathcal{C}$ aussi.*

Les deux familles proposées forment des bases. On peut le voir par exemple pour chacune des bases en écrivant la matrice dont les colonnes sont les vecteurs de coordonnées des polynômes donnés par rapport à la base canonique. Cette matrice est inversible dans les deux cas.

d. ☐ *Alors $s_{13} = 3/2$ et $t_{23} = -9/8$.*

Les matrices de changement de base sont :

$$S = \begin{pmatrix} 1/2 & 3/2 & 3/2 \\ -1 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } T = \begin{pmatrix} 1/2 & -3/4 & 3/8 \\ 1/2 & 1/4 & -9/8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

e. ☐ *0 est une valeur propre de A.*

Par l'exercice 7 première partie, comme $A = A - 0 \cdot I_2$ n'est pas inversible, le système $A\overrightarrow{x} = 0$ admet une solution non nulle. Autrement dit, 0 est une valeur propre de A. En particulier, cela implique que A a une valeur propre réelle. Ensuite, considérer la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

qui n'est pas inversible et non nulle. Finalement, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ n'est pas un vecteur propre de A, par exemple.