Série 10 (Corrigé)

Exercice 1 (Changement de base)

Dans $\mathbb{P}_2$, calculer la matrice de changement de base de la base

$$\mathcal{B} = (1 - 2t + t^2, 3 - 5t + 4t^2, 2t + 3t^2)$$

vers la base canonique $\mathcal{C} = (1, t, t^2)$. Puis écrire les coordonnées du vecteur $p = -1 + 2t$ dans la base $\mathcal{B}$.

Sol.:

Pour trouver la matrice de changement de base de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{C}$, il suffit d'écrire la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de la base $\mathcal{B}$ dans la base canonique $\mathcal{C}$:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Les coordonnées du vecteur $x(t) = -1 + 2t$ dans la base standard sont : $(x)_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Les coordonnées $(x)_{\mathcal{B}}$ du même vecteur dans la base $\mathcal{B}$ vérifient : $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} (x)_{\mathcal{B}} = (x)_{\mathcal{C}}$. Il suffit d'échelonner la matrice augmentée :

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 0 & -1 \\ -2 & -5 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

pour trouver : $(x)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Cela signifie que $-1 + 2t = 5(1 - 2t + t^2) - 2(3 - 5t + 4t^2) + (2t + 3t^2)$, une égalité que l'on aura avantage à vérifier si on ne veut pas perdre trois points à l'examen alors que le raisonnement était parfait.

Exercice 2 (Matrice d'une application)

Considérer l'application linéaire $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ définie par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \\ x_3 + x_4 \\ x_1 + x_4 \end{pmatrix} .$$

Donner la matrice $[T]_{\mathcal{B}}$ de T dans la base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1\\0\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\-1\\0\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\2 \end{pmatrix} \right\}$.

On s'aidera des matrices $[T]_{\mathcal{E}}$, $P_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}$, et $P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}}$.

Sol.: *On exprime d'abord T dans la base canonique :*

$$[T]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ensuite, puisque les vecteurs de la base $\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4)$ sont donnés par

$$\vec{b}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_3\,, \quad \vec{b}_2 = -\vec{e}_2 + \vec{e}_4\,, \quad \vec{b}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_4\,, \quad \vec{b}_4 = 2\vec{e}_4\,,$$

on a la matrice de changement de base :

$$P_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Son inverse se calcule par exemple en utilisant l'algorithme de Gauss-Jordan, qui donne

$$P_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}^{-1} = P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

On calcule alors

$$[T]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}}[T]_{\mathcal{E}}P_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 (Valeurs et vecteurs propres)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -15 & 1 & -9 \\ 0 & 6 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Est-ce que $\lambda = 6$ est une valeur propre de A ?

b) Même question avec $\lambda = 1$ et $\lambda = -9$.

Sol.:

a) En calculant $A - 6I_3$, on obtient une matrice dont la seconde ligne est nulle, donc une matrice non-inversible. Par conséquent, $\mathrm{Ker}(A - 6I_3) \neq \{\vec{0}\}$ *et* 6 *est une valeur propre.*

b) On calcule :

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} -16 & 1 & -9 \\ 0 & 5 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A + 9I_3 = \begin{pmatrix} -6 & 1 & -9 \\ 0 & 15 & 0 \\ 4 & 1 & 12 \end{pmatrix}.$$

Les déterminants de ces matrices (en développant par rapport à la deuxième ligne) sont respectivement $5 \cdot (-16 \cdot 2 + 4 \cdot 9)$ *et* $15 \cdot (-6 \cdot 12 + 4 \cdot 9)$*. Ils sont non nuls, par conséquent ces matrices sont inversibles, et ni* 1 *ni* -9 *ne sont des valeurs propres.*

Exercice 4 (Polynôme caracteristique)

Soients

$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 5 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix},$

et $E = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 17 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

Calculer le polynôme caractéristique, les valeurs propres et les vecteurs propres de chacune de ces matrices A, B, C, D, E.

Sol.:

A. Le polynôme caractéristique de A *est* $\lambda^2 - 5\lambda + 5$*. Les valeurs propres de* A *sont* $\{\frac{5+\sqrt{5}}{2}, \frac{5-\sqrt{5}}{2}\}$*. Les vecteurs propres correspondants sont* $\left\{ \begin{pmatrix} \frac{-3-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{-3+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

B. Le polynôme caractéristique de B *est* $(\lambda - 4)^2$*. Les valeurs propres de* B *sont* $\{4, 4\}$ *(il y a une seule valeur propre* 4 *de multiplicité algébrique* 2*). Le vecteurs propres correspondants :* $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Remarque : l'espace propre est de dimension seulement 1 *alors que la valeur propre est de multiplicité* 2*, la matrice n'est pas diagonalisable.*

C. Le polynôme caractéristique de C *est* $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda - 4 = (\lambda - 4)(\lambda - 1)^2$*. Les valeurs propres de* C *sont* $\{4, 1, 1\}$ *c-à-d les coefficients diagonaux de la matrice triangulaire. Les vecteurs propres correspondants sont* $\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

D. Le polynôme caractéristique de D *est* $-\lambda^3 + 36\lambda = -\lambda(\lambda + 6)(\lambda - 6)$*. Les valeurs propres de* D *sont donc* $\{-6, 0, 6\}$*. Les vecteurs propres correspondants sont*

$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

E. Le polynôme caractéristique de E *est* $\lambda^4 - 10\lambda^3 + 35\lambda^2 - 50\lambda + 24 = (\lambda - 3)(\lambda - 4)(\lambda - 1)(\lambda - 2)$*. Les valeurs propres de* E *sont* $\{3, 4, 1, 2\}$ *c-à-d les coefficients diagonaux de*

la matrice triangulaire. Les vecteurs propres correspondants sont
$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}31\\-34\\6\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}113\\-60\\7\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

Exercice 5 (Preuve)

Soit $A \in M_{n\times n}$ admettant une valeur propre λ associée au vecteur propre $\vec{v}$.

a) Trouver une valeur propre (et son vecteur propre associé) de la matrice $B = cA$.

b) Pour $k \geq 2$, trouver une valeur propre (et son vecteur propre associé) de A^k.

Sol.: *Par définition, on a $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$. On observe que*

$$B\vec{v} = cA\vec{v} = c\lambda\vec{v} = (c\lambda)\vec{v},$$

ainsi, $c\lambda$ est une valeur propre de B dont le vecteur associé est $\vec{v}$.

Par récurrence sur k, on montre $A^k\vec{v} = \lambda^k\vec{v}$. Supposons le résultat vrai au rang $k-1$, c-à-d $A^{k-1}\vec{v} = \lambda^{k-1}\vec{v}$. On a alors :

$$A^k\vec{v} = A(A^{k-1}\vec{v}) = A(\lambda^{k-1}\vec{v}) = \lambda^{k-1}A\vec{v} = \lambda^{k-1}\lambda\vec{v} = \lambda^k\vec{v}.$$

Ceci montre que le vecteur $\vec{v}$ est un vecteur propre de la matrice A^k associé à la valeur propre λ^k.

Exercice 6 (Valeurs et espaces propres)

Soit A la matrice $\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$. Montrer que 0 et 6 sont des valeurs propres de A et calculer les espaces propres associés.

Sol.: *Soit A la matrice $\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$. Comme la somme des coefficients de chaque ligne vaut 6, on a que $6 = 1+2+3$ est une valeur propre. Un vecteur propre est par exemple $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. Celui-ci forme une base de E_6.*

D'autre part le rang de cette matrice vaut 1 car toutes les colonnes sont proportionnelles. Par conséquent le noyau est de dimension 2 par le Théorème du rang ce qui signifie que 0 est une valeur propre. L'espace propre E_0 est donc de dimension 2 : $E_0 = \{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1+2x_2+3x_3 = 0\}$ dont une base est donnée par $\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$.

Exercice 7 (Valeurs propres)

Soit A la matrice 2×2 réelle donnée par

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Montrer que $\lambda = a \pm ib$ sont les valeurs propres de A.

Sol.: *Le polynôme caractéristique de A est donné par $\lambda^2 - 2a\lambda + (a^2 + b^2)$. Donc les valeurs propres de A sont*

$$\lambda_{1,2} = \frac{2a \pm \sqrt{4a^2 - 4(a^2 + b^2)}}{2} = a \pm \sqrt{-b^2} = a \pm bi.$$

Exercice 8 (Valeurs et espaces propres)

Calculer pour les matrices suivantes les valeurs propres et une base de chaque espace propre dans $\mathbb{C}^2$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Sol.:

A. Le polynôme caractéristique de A est $\lambda^2 - 6\lambda + 10$. Les valeurs propres de A sont $\lambda_{1,2} = 3 \pm i$. Les vecteurs propres correspondants sont $v_1 = \begin{pmatrix} 2+i \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 2-i \\ 1 \end{pmatrix}$.

B. Le polynôme caractéristique de B est $\lambda^2 - 8\lambda + 17$. Les valeurs propres de B sont $\lambda_{1,2} = 4 \pm i$. Les vecteurs propres correspondants sont $v_1 = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix}$.

C. Le polynôme caractéristique de C est $\lambda^2 - 8\lambda + 25$. Les valeurs propres de C sont $\lambda_{1,2} = 4 \pm 3i$. Les vecteurs propres correspondants sont $v_1 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 9 (Théorème du rang)

Soit A une matrice de taille $m \times n$. Démontrer que $A\vec{x} = \vec{b}$ admet une solution pour tout $\vec{b}$ dans $\mathbb{R}^m$ si et seulement si $A^T\vec{y} = \vec{0}$ n'admet que la solution triviale $\vec{y} = \vec{0}$.

Indication : Utiliser le théorème du rang.

Sol.: *Soit A une matrice de taille $m \times n$.*

Dire que $A\vec{x} = \vec{b}$ admet toujours une solution est équivalent à dire que A est surjective, i.e. $\dim \operatorname{Im} A = m$. Par le Théorème du rang la dimension du noyau de A vaut $n - m$, ou encore le sous-espace engendré par les lignes de A est de dimension m. Les lignes de A

étant les colonnes de A^T *ceci veut dire que* $\dim \operatorname{Im} A^T = m$. *Une dernière application du Théorème du rang nous permet enfin de conclure que* $\dim \operatorname{Ker} A^T = m - m = 0$. *La matrice* A^T *représente donc une application linéaire injective. Ceci équivaut à dire que l'équation* $A^T\vec{x} = 0$ *n'admet que la solution triviale.*

Exercice 10 (VF)

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

	V	F
a) Soient V un espace vectoriel et H un sous-espace vectoriel de V. Alors on a aussi que V est un sous-espace vectoriel de lui-même (ou d'un espace vectoriel plus grand) et H est un espace vectoriel.	☐	☐
b) Si H est un sous-ensemble d'un espace vectoriel V, alors il suffit que 0_V soit dans H pour que H soit un sous-espace vectoriel de V.	☐	☐
c) Une matrice carrée A est inversible si et seulement si $\operatorname{Ker}(A) = \{\vec{0}\}$.	☐	☐
d) Le noyau d'une matrice A n'est pas nécessairement un espace vectoriel.	☐	☐

Sol.: *Vrai : (a), (c). Faux : (b), (d).*

Exercice 11 (VF)

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

	V	F
a) La matrice A n'est pas inversible si et seulement si 0 est une valeur propre de A.	☐	☐
b) Une matrice A carrée est inversible si et seulement si elle est diagonalisable.	☐	☐
c) Les valeurs propres d'une matrice carrée sont sur sa diagonale.	☐	☐
d) On trouve les valeurs propres de A en réduisant la matrice à sa forme échelonnée.	☐	☐

Sol.: *Vrai : a). Faux : b), c), d).*

Exercice 12 (VF)

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

	V	F
a) Si A et B sont deux matrices semblables, alors elles ont les mêmes valeurs propres.	☐	☐
b) Pour qu'une matrice $n \times n$ soit diagonalisable il faut qu'elle ait au moins n valeurs propres distinctes.	☐	☐
c) Si v_1 et v_2 sont deux vecteurs propres linéairement indépendants, alors leur valeurs propres associées sont différentes.	☐	☐
d) Soient A, B et C trois matrices. Si A et B sont semblables, et si B et C sont semblables, alors A et C sont semblables.	☐	☐

Sol.: *Vrai : a), d). Faux : b), c).*

Exercice 13 (QCM)

Soit $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices 2×2 à coefficients réels.

1. Soit $V = \{M \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid M \text{soit inversible}\}$. Alors
   - ☐ V est un sous-espace vectoriel de $M_{2\times 2}$
   - ☐ V est un espace vectoriel.
   - ☐ V n'est pas un espace vectoriel.
   - ☐ V est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des matrices inversibles.
2. Soit $E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Alors

   ☐ $[M]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ☐ $[M]_E = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

   ☐ $[M]_E = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ☐ $[M]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$
3. Quelle famille ci-dessous est une base de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.
   - ☐ $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$
   - ☐ $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$
   - ☐ $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$
   - ☐ $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

Sol.:

1. *V n'est pas un sous-espace vectoriel*
2. $[M]_E = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$
3. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$