Exercices — Série 9

Mots-clés: matrice d'une transformation linéaire dans des bases, valeurs et vecteurs propres, espaces propres, diagonalisation.

Question 1 Soit d une droite passant par $(0,0)$ et notons par θ l'angle formé par d et l'axe Ox. Donnez la matrice de la symétrie axiale d'axe d par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^2$, en fonction de θ.

Solution: Considérons la base $\mathcal{B} = (b_1, b_2)$ où $b_1 = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$ et $b_2 = \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$.
Soit $S : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la symétrie axiale d'axe d. Alors la matrice de S par rapport aux bases $\mathcal{B}$ (de départ) et $\mathcal{B}$ (d'arrivée) est simplement:

$$[S]_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Soit $\mathcal{E}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. D'après la formule de changement de base on a

$$[S]_{\mathcal{E}\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E}\mathcal{B}}\,[S]_{\mathcal{B}\mathcal{B}}\,P_{\mathcal{B}\mathcal{E}}$$

où $P_{\mathcal{E}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ et $P_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = P_{\mathcal{E}\mathcal{B}}^{-1}$.
On calcule alors le produit de ces 3 matrices:

$$[S]_{\mathcal{E}\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Donc nous avons

$$[S]_{\mathcal{E}\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) & 2\cos(\theta)\sin(\theta) \\ 2\cos(\theta)\sin(\theta) & \sin^2(\theta) - \cos^2(\theta) \end{pmatrix}$$

Question 2 On considère la transformation $T : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{P}_2$ définie par

$$T(a + bt + ct^2 + dt^3) = (a + b + c + d) + (a + b)t + (c + d)t^2.$$

a) Donner la matrice de T dans les bases $(1, t, t^2, t^3)$ de $\mathbb{P}_3$ et $(1, t, t^2)$ de $\mathbb{P}_2$.

b) Trouver la dimension et une base de $\mathrm{Im}(T)$ et $\mathrm{Ker}(T)$ respectivement.

c) Vérifier que le polynôme $7 + 5t + 2t^2$ est bien dans l'image de T et donner ses coordonnées dans la base trouvée en b).

d) Vérifier que le polynôme $2 - 2t - 5t^2 + 5t^3$ est bien dans le noyau de T et donner ses coordonnées dans la base trouvée en b).

Solution:

a) Par rapport aux bases canoniques $\{1, t, t^2, t^3\}$ de $\mathbb{P}_3$ et $\{1, t, t^2\}$ de $\mathbb{P}_2$, la matrice associée à l'application linéaire T est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Ainsi $\mathrm{Im}(T)$ est de dimension 2 avec base $\mathcal{B}_{\mathrm{Im}} = (1 + t, 1 + t^2)$ (prendre les colonnes-pivot de A et non pas de sa forme échelonnée réduite!) et $\mathrm{Ker}(T)$ est de dimension 2 avec base $\mathcal{B}_{\mathrm{Ker}} = (1 - t, t^2 - t^3)$ (prendre les lignes non nulles de sa forme échelonnée réduite).

c) Le polynôme $7 + 5t + 2t^2$ est bien dans l'image de T puisque - par exemple - $T(5 + 2t^2) = 7 + 5t + 2t^2$. Ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}_{\mathrm{Im}}$ sont

$$[7 + 5t + 2t^2]_{\mathcal{B}_{\mathrm{Im}}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix},$$

puisque $7 + 5t + 2t^2 = 5(1 + t) + 2(1 + t^2)$.

d) On a bien $2 - 2t - 5t^2 + 5t^3 \in \mathrm{Ker}(T)$ puisque $T(2 - 2t - 5t^2 + 5t^3) = 0$. Ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}_{\mathrm{Ker}}$ sont

$$[2 - 2t - 5t^2 + 5t^3]_{\mathcal{B}_{\mathrm{Ker}}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix},$$

puisque $2 - 2t - 5t^2 + 5t^3 = 2(1 - t) - 5(t^2 - t^3)$.

Question 3 Soit A une matrice de taille 2×2 et $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$.

a) Montrer que le système $A\overrightarrow{x} = \lambda\overrightarrow{x}$ a une solution non nulle si et seulement si la matrice $A - \lambda I_2$ n'est pas inversible.

b) Prenons $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $A\overrightarrow{x}$.

c) Trouver pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ la matrice $A - \lambda I_2$ n'est pas inversible.

d) Montrer que les deux valeurs trouvées ci-dessus sont des valeurs propres de A.

e) Calculer les espaces propres correspondants aux deux valeurs propres.

Solution: Soit A une matrice 2×2 et $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$.

a) Le système $A\overrightarrow{x} = \lambda\overrightarrow{x}$ a une solution non nulle si et seulement s'il existe un vecteur non nul $\overrightarrow{x}$ tel que

$$\overrightarrow{0} = A\overrightarrow{x} - \lambda\overrightarrow{x} = A\overrightarrow{x} - \lambda I_2\overrightarrow{x} = (A - \lambda I_2)\overrightarrow{x}$$

Ceci signifie que le système homogène associé à la matrice $A - \lambda I_2$ a une solution non triviale, autrement dit cette matrice n'est pas inversible.

b) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. On calcule $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u + 3v \\ 3u + v \end{pmatrix}$

c) La matrice $A - \lambda I_2$ n'est pas inversible si et seulement son déterminant est nul. Il suffit donc de calculer

$$\det(A - \lambda I_2) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 3 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 - 3^2$$

Pour que ce déterminant soit nul il faut donc que $(1-\lambda)^2 = 9$, autrement dit $1 - \lambda = \pm 3$. On en conclut que les valeurs cherchées sont $\lambda_1 = -2$ et $\lambda = 4$.

d) Lorsque λ vaut -2 ou 4, la matrice $A - \lambda I_2$ n'est pas inversible et le système de la partie 2 a donc une solution non triviale. Cela veut exactement dire que cette solution non triviale forme un vecteur propre. Ainsi les les valeurs propres sont -2 et 4.

e) On calcule $E_4 = \text{Vect}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ et $E_{-2} = \text{Vect}\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}$.

Question 4

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -15 & 1 & -9 \\ 0 & 6 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Est-ce que $\lambda = 6$ est une valeur propre de A?

■ VRAI □ FAUX

b) Est-ce que $\lambda = 1$ et $\lambda = -9$ sont des valeurs propres de A?

□ VRAI ■ FAUX

Solution:

a) En calculant $A - 6I_3$, on obtient une matrice dont la seconde ligne est nulle, donc une matrice non-inversible. Par conséquent, $\text{Ker}(A - 6I_3) \neq \{\vec{0}\}$ et 6 est une valeur propre.

b) On calcule:

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} -16 & 1 & -9 \\ 0 & 5 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A + 9I_3 = \begin{pmatrix} -6 & 1 & -9 \\ 0 & 15 & 0 \\ 4 & 1 & 12 \end{pmatrix}.$$

Les déterminants de ces matrices (en développant par rapport à la deuxième ligne) sont respectivement $5 \cdot (-16 \cdot 2 + 4 \cdot 9)$ et $15 \cdot (-6 \cdot 12 + 4 \cdot 9)$. Ils sont non nuls, par conséquent ces matrices sont inversibles, et ni 1 ni -9 ne sont des valeurs propres.

Question 5

Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Montrer que 0 et 6 sont des valeurs propres de A et calculer les espaces propres associés.

Solution: Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Comme la somme des coefficients de chaque ligne vaut 6, on a que $6 = 1 + 2 + 3$ est une valeur propre. Un vecteur propre est par exemple $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Celui-ci forme une base de E_6.

D'autre part le rang de cette matrice vaut 1 car toutes les colonnes sont proportionnelles. Par conséquent le noyau est de dimension 2 par le Théorème du rang ce qui signifie que 0 est une valeur propre. L'espace propre E_0 est donc de dimension 2: $E_0 = \{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1+2x_2+3x_3 = 0\}$ dont une base est $\left(\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\right)$.

Question 6

a) Est-ce que $\lambda = 4$ est une valeur propre de la matrice: $A = \begin{pmatrix}3 & 0 & -1\\2 & 3 & 1\\-3 & 4 & 5\end{pmatrix}$? Si oui, trouver un vecteur propre pour cette valeur propre.

b) Est-ce que $\begin{pmatrix}4\\-3\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur propre de $\begin{pmatrix}3 & 7 & 9\\-4 & -5 & 1\\2 & 4 & 4\end{pmatrix}$?

c) Trouver une base de l'espace propre associé à la valeur propre $\lambda = 3$ de la matrice
$M = \begin{pmatrix}4 & 2 & 3\\-1 & 1 & -3\\2 & 4 & 9\end{pmatrix}$. Quelle est la dimension de cet espace propre?

Solution:

a) Le nombre $\lambda = 4$ est une valeur propre de la matrice $A = \begin{pmatrix}3 & 0 & -1\\2 & 3 & 1\\-3 & 4 & 5\end{pmatrix}$ si et seulement si il existe un vecteur $\overrightarrow{x}$ non nul tel que $A\overrightarrow{x} = 4\overrightarrow{x}$. Dans ce cas $\overrightarrow{x}$ est un vecteur propre pour la valeur propre 4. Puisque $4\overrightarrow{x} = (4I_3)\overrightarrow{x}$, nous nous demandons en fait si la matrice $A - 4I_3$ a un noyau non nul. Il suffit donc d'échelonner cette matrice pour le vérifier.

$$\begin{pmatrix}-1 & 0 & -1\\2 & -1 & 1\\-3 & 4 & 1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}-1 & 0 & -1\\0 & -1 & -1\\0 & 4 & 4\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}-1 & 0 & -1\\0 & -1 & -1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Ainsi 4 est une valeur propre. On trouve par exemple comme vecteur propre

$$\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

b) Pour qu'un vecteur $\overrightarrow{x}$ soit vecteur propre de A, il doit satisfaire l'équation

$A\overrightarrow{x} = \lambda\overrightarrow{x}$ pour une certaine valeur de λ. Ici, le produit $A\overrightarrow{x}$ donne $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Donc, $\overrightarrow{x}$ est un vecteur propre de A correspondant à la valeur propre $\lambda = 0$.

c) L'espace propre correspondant à une valeur propre λ contient tous les vecteurs qui satisfont $A\overrightarrow{x} = \lambda\overrightarrow{x}$, c'est-à-dire $(A-\lambda I)\overrightarrow{x} = 0$. L'espace propre est donc identique à $\mathrm{Ker}(A - \lambda I)$. Pour trouver sa base, on exprime la solution de l'équation $(A - \lambda I)\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ dans sa forme paramétrique. Ici, on trouve deux variables libres x_2 et x_3 et en réexprimant x_1 en fonction de ces deux variables libres, la forme paramétrique nous livre deux vecteurs de base pour la valeur propre $\lambda = 3$ donnés par

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La dimension du sous-espace propre E_3 est donc égale à 2.

Question 7 Soit A de taille 3×3 inversible et λ une valeur propre de A.

- ☐ Alors λ est une valeur propre de A^{-1}.
- ☐ Alors λ est une valeur propre de $-A$.
- ■ Alors λ^{-1} est une valeur propre de A^{-1}.
- ☐ Alors λ^{-1} est une valeur propre de $-A$.

Solution: Alors λ^{-1} est une valeur propre de A^{-1}.

En effet, si $\overrightarrow{x}$ est un vecteur propre de la matrice A pour la valeur propre λ, on a $A\overrightarrow{x} = \lambda\overrightarrow{x}$. Multiplions cette égalité à gauche par la matrice inverse A^{-1}:

$$\overrightarrow{x} = A^{-1}A\overrightarrow{x} = A^{-1}\lambda\overrightarrow{x} = \lambda A^{-1}\overrightarrow{x}$$

Ainsi, en divisant par λ (on le peut car $\lambda \neq 0$ puisque A est inversible!), on conclut que l'inverse de λ est une valeur propre de l'inverse de A, pour le même vecteur propre! Il n'y a aucune raison pour que λ soit une valeur propre de A^{-1} et pour que λ ou λ^{-1} soit une valeur propre de $-A$. Pensons en effet à la matrice $2I$ dont la seule valeur propre est 2. Par contre, il est vrai que $-\lambda$ est une valeur propre de $-A$ puisque si $\overrightarrow{x}$ est un vecteur propre de A pour la valeur propre λ, alors $(-A)\overrightarrow{x} = -A\overrightarrow{x} = -\lambda\overrightarrow{x}$.

Question 8 Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$.

- ■ Alors -4 et 6 sont valeurs propres de A.
- □ Alors 6 et 0 sont valeurs propres de A.
- □ Alors seulement 6 est une valeur propre de A.
- □ Alors -6 et -4 sont valeurs propres de A.

Solution: Alors -4 et 6 sont valeurs propres de A. On voit que 6 est une valeur propre de A car la somme des lignes vaut toujours $6 = 1+5$ et un vecteur propre est $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On voit aussi que -4 est valeur propre de A, et un vecteur propre est $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Comme les deux lignes de A ne sont pas colinéaires, le noyau de A est nul et donc 0 n'est pas valeur propre, et -6 n'est pas valeur propre non plus car $A + 6I_2$ est de rang 2. Nous verrons bientôt qu'une matrice carrée de taille $n \times n$ ne peut avoir plus de n valeurs propres, nous aurions donc pu nous contenter d'observer que 6 et -4 sont valeurs propres pour éliminer les réponses 1, 2 et 3.

Question 9
Soit A une matrice de taille 2×2 qui n'est pas inversible. Alors

- □ A est la matrice nulle.
- □ A n'a pas de valeur propre réelle.
- □ tout vecteur de $\mathbb{R}^2$ est un vecteur propre de A.
- ■ 0 est une valeur propre de A.

Solution: 0 est une valeur propre de A.

Comme $A = A - 0 \cdot I_2$ n'est pas inversible, le système $A\overrightarrow{x} = 0$ admet une solution non nulle. Autrement dit, 0 est une valeur propre de A. En particulier, cela implique que A a une valeur propre réelle. Ensuite, considérer la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ qui n'est pas inversible et non nulle. Finalement, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ n'est pas un vecteur propre de A, par exemple.

Question 10
Soit A une matrice de taille $n \times n$ et $k \geq 2$ un entier. Vérifier que si λ est une valeur propre de A avec pour vecteur propre $\vec{v}$, alors λ^k est une valeur propre de

$$A^k = \underbrace{A\,A \cdots A}_{k \text{ fois}}$$

avec pour vecteur propre $\vec{v}$.

Solution: Par définition, on a $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$. Par récurrence sur k, on montre $A^k\vec{v} = \lambda^k\vec{v}$. Supposons le résultat vrai au rang $k-1$, c-à-d $A^{k-1}\vec{v} = \lambda^{k-1}\vec{v}$. On a alors:

$$A^k\vec{v} = A(A^{k-1}\vec{v}) = A(\lambda^{k-1}\vec{v}) = \lambda^{k-1}A\vec{v} = \lambda^{k-1}\lambda\vec{v} = \lambda^k\vec{v}.$$

Ceci montre que le vecteur $\vec{v}$, non nul, est un vecteur propre de la matrice A^k associé à la valeur propre λ^k.

Question 11
Vrai ou Faux. Justifier votre affirmation. Soient $n \geq 2$ et $k \geq 2$ entiers.

a) Si A est une matrice $n \times n$ diagonalisable, alors A^k est diagonalisable.

■ VRAI ☐ FAUX

b) Si A est une matrice $n \times n$ et A^k est diagonalisable, alors A est diagonalisable.

☐ VRAI ■ FAUX

Solution:

a) L'affirmation est vraie. Si A est diagonalisable, alors il existe P une matrice $n \times n$ inversible et D une matrice $n \times n$ diagonale telles que $P^{-1}AP = D$. Alors, on a

$$P^{-1}A^kP = P^{-1}APP^{-1}AP \dots P^{-1}AP = DD \dots D = D^k,$$

et comme D^k est diagonale, A^k est bien diagonalisable.

b) L'affirmation est fausse. En effet, on considère la matrice A avec des zéros partout sauf un 1 en haut à droite (ligne 1, colonne n). Cette matrice A n'est pas diagonalisable, et pourtant A^k est nulle donc diagonalisable.

Question 12 Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que $A = PDP^{-1}$; ensuite, utiliser cette expression pour donner une expression simple pour A^k, pour un entier positif k quelconque.

Solution: On vérifie en effet que

$$P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

et donc

$$PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = A.$$

La factorisation $A = PDP^{-1}$ permet de calculer facilement les puissances successives de A. En effet,

$$A^2 = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD\underbrace{(P^{-1}P)}_{=I_2}DP^{-1} = PD^2P^{-1}.$$

Par induction, on en déduit que pour tout entier $n \geq 1$,

$$A^n = PD^nP^{-1}.$$

Remarquons que puisque D est diagonale, sa n-ème puissance est donnée par

$$D^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}.$$

Ceci permet donc de calculer

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

qui se simplifie pour donner

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{3^n+(-1)^n}{2} & \frac{(-1)^n-3^n}{4} \\ (-1)^n - 3^n & \frac{3^n+(-1)^n}{2} \end{pmatrix}$$

.