

## Exercices — Série 8

**Mots-clés:** bases, dimension d'un (sous)-espace vectoriel, rang, théorème du rang, changement de base, matrice d'une transformation linéaire dans des bases.

**Question 1** Soient  $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 9 & -7 \\ -1 & 2 & -4 & 1 \\ 5 & -6 & 10 & 7 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

- Montrer que les matrices  $A$  et  $B$  sont équivalentes (selon les lignes).
- Calculer  $\text{rg}(A)$  et  $\dim \text{Ker}A$ .
- Trouver une base pour chacun des sous-espaces  $\text{Im}A$ ,  $\text{Ker}A$  et  $\text{Ker}A^T$ , ainsi que du sous-espace  $\text{Lgn}(A)$  engendré par les lignes de  $A$ .

**Solution:**

- On constate que la forme échelonnée réduite des deux matrices est la même, elles sont donc équivalentes.
- En analysant la matrice  $B$  on remarque alors que :

Il y a deux colonnes indépendantes ce qui donne  $\text{rg}(A) = 2$  (le rang est le nombre de colonnes-pivot) et une base de  $\text{Im}(A)$  peut être formée par les deux premières colonnes de  $A$  qui correspondent aux colonnes-pivot de sa forme échelonnée. Par le Théorème du rang on trouve  $\dim \text{Ker}(A) = 4 - \text{rg}(A) = 2$ .

Trouvons les bases.

- Base de  $\text{Ker}(A)$ : L'équation  $A \vec{x} = 0$  est équivalente à  $B \vec{x} = 0$ ; une base de  $\text{Ker}(A)$  est donnée par :  $\left( \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$  et donc  $\dim \text{Ker}(A) = 2$ , ce qui confirme le calcul effectué ci-dessus.

Base de  $\text{Lgn}(A)$ : Une base du sous-espace engendré par les lignes de  $A$  est donnée par les lignes non nulles de la forme échelonnée  $B$ :

$$\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} \right)$$

Base de  $\text{Im}(A)$  et  $\text{Ker}(A^T)$ : On a vu plus haut que les deux premières colonnes de  $A$  forment une base de  $\text{Im}(A)$ . Enfin  $\text{Im}(A)$  coïncide avec le sous-espace engendré par les lignes de  $A^T$ . Puisqu'il est de dimension 2, le Théorème du rang nous apprend que le noyau de  $A^T$  est de dimension  $3 - 2 = 1$ . On trouve que  $\text{Ker}(A^T)$  est engendré par  $\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

**Question 2** Soit  $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 6 \\ -4 & 12 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}$ . Alors  $\text{Im}(A)$  est un sous-espace de  $\mathbb{R}^4$  de dimension 1.

VRAI  FAUX

**Solution:** La matrice  $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 6 \\ -4 & 12 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}$  donne une application linéaire  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ .

Ainsi  $\text{Im}(A)$  est un sous-espace de  $\mathbb{R}^4$ , pas de  $\mathbb{R}^2$ . Pour trouver sa dimension, il faut analyser les colonnes de  $A$ . On constate qu'elles sont proportionnelles et donc que la dimension de  $\text{Im}(A)$  est 1.

**Question 3** Soit  $V$  un espace vectoriel et  $v_1, \dots, v_k \in V$ . Alors

- Si la famille  $\{v_1, \dots, v_k\}$  engendre l'espace vectoriel  $V$ , alors  $\dim V \geq k$ .
- Si la famille  $\{v_1, \dots, v_k\}$  engendre l'espace vectoriel  $V$ , alors  $\dim V = k$ .
- Si la famille  $\{v_1, \dots, v_k\}$  est libre, alors  $\dim V \geq k$ .
- Si la famille  $\{v_1, \dots, v_k\}$  est libre, alors  $\dim V = k$ .

**Solution:** La réponse est: Si la famille  $\{v_1, \dots, v_k\}$  est libre, alors  $\dim V \geq k$ . En effet, si la famille  $\{v_1, \dots, v_k\}$  est libre, on peut *compléter* cette famille en une base et cette base aura donc au moins  $k$  éléments. Autrement dit, la dimension de  $V$  est  $k$  au minimum ( $\dim V \geq k$ ). Alors que, si la famille  $\{v_1, \dots, v_k\}$  engendre  $V$ , on peut *extraire* une base de cette famille et cette base aura donc au plus  $k$  éléments. Autrement dit, la dimension de  $V$  est  $k$  au maximum ( $\dim V \leq k$ ).

**Question 4** Il existe une matrice  $A$  de taille  $3 \times 7$  telle que:

- $\dim \text{Ker}(A) = 4$  et  $\text{rg}(A) \leq 2$
- $\dim \text{Ker}(A) = 5$  et  $\text{rg}(A) = 2$
- $\dim \text{Ker}(A) = 2$  et  $\text{rg}(A) \leq 4$
- $\dim \text{Ker}(A) = 3$  et  $\text{rg}(A) = 4$

**Solution:** La matrice  $A$  représente une application linéaire  $\mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Par conséquent, l'image de  $A$  est un sous-espace de  $\mathbb{R}^3$ , c'est donc un sous-espace de dimension  $\leq 3$ . Le Théorème du rang affirme que

$$\dim \text{Ker}(A) = 7 - \text{rg}(A) \geq 7 - 3 = 4$$

ce qui élimine deux affirmations (celles qui disent que  $\dim \text{Ker}(A) \leq 3$ ). Intuitivement c'est clair: il faut "éliminer" au moins un sous-espace de dimension 4 pour envoyer un espace de dimension 7 dans  $\mathbb{R}^3$ . Enfin le Théorème du rang s'écrit aussi  $\dim \text{Ker}(A) + \text{rg}(A) = 7$ , ce qui élimine aussi l'affirmation  $\dim \text{Ker}(A) = 4$  et  $\text{rg}(A) \leq 2$  car, dans ce cas, la somme ne peut pas être égale à 7.

**Question 5** Soit  $A$  la matrice de la projection orthogonale  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  sur le plan horizontal  $\text{Vect}\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ . Alors  $\dim \text{Ker}(A) = 1$  et  $\text{rg}(A) = 2$ .

VRAI  FAUX

**Solution:** On a  $\dim \text{Ker}A = 1$ , puisque le noyau est la droite  $\text{Vect}(\vec{e}_3)$  et  $\dim \text{Im}A = \text{rg}(A) = 2$  puisque l'image de  $A$  est le plan  $Oxy$ , un sous-espace de  $\mathbb{R}^3$  de dimension 2.

**Question 6** Soit  $A$  une matrice inversible de taille  $5 \times 5$ . Laquelle des affirmations suivantes est vraie?

- $\text{Ker}(A)$  est vide
- Les lignes de  $A$  sont linéairement indépendantes
- Le rang de  $A$  est strictement plus petit que 5
- Les colonnes de  $A$  n'engendrent pas  $\mathbb{R}^5$

**Solution:** La forme échelonnée d'une matrice inversible a un pivot dans chaque ligne et chaque colonne. Ainsi les colonnes, et les lignes également, forment une base de  $\mathbb{R}^5$ . Donc en particulier elles engendrent  $\mathbb{R}^5$  et elles sont linéairement indépendantes. L'application linéaire que représente  $A$  est bijective, et donc le noyau est *nul* (pas vide!), et l'image de  $A$  est  $\mathbb{R}^5$  tout entier, donc le rang de  $A$  vaut 5.

**Question 7** Soit  $T: \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $T(p) = p(-1) + p(0) + p(1)$ . Alors

- $\dim \text{Ker}(T) = 1$  et  $\text{rg}(T) = 2$
- $\dim \text{Ker}(T) = 1$  et  $\text{rg}(T) = 1$
- $T$  n'est pas linéaire
- $\dim \text{Ker}(T) = 2$  et  $\text{rg}(T) = 1$

**Solution:** L'application  $T$  est linéaire et, plus explicitement, on a  $T(a+bt+ct^2) = 3a + 2c$ . En particulier,  $T$  n'est pas l'application nulle et donc la dimension de l'image de  $T$  est 1. Par le théorème du rang, celle du noyau est 2.

**Question 8** Soit  $T: \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $T(p) = p(-1) + p(0) + p(1)$ . Une base du noyau de  $T$  est donnée par  $\{-2 + t + 3t^2, 2 - 3t^2\}$ .

VRAI  FAUX

**Solution:** Par la question précédente, la dimension du noyau vaut 2. Il faut donc 2 polynômes linéairement indépendants pour engendrer le noyau. On remarque que  $-2 + t + 3t^2$  et  $2 - 3t^2$  sont des polynômes linéairement indépendants qui appartiennent au noyau de  $T$ . Ils forment donc une base du noyau.

**Question 9**

Soient  $\mathcal{B} = (b_1, b_2)$  et  $\mathcal{C} = (c_1, c_2)$  deux bases d'un espace vectoriel  $V$ . Supposons que  $b_1 = 6c_1 - 2c_2$  et  $b_2 = 9c_1 - 4c_2$ .

- (a) Calculer la matrice de changement de base  $P_{\mathcal{CB}}$  de  $\mathcal{B}$  vers  $\mathcal{C}$ .
- (b) Trouver  $[x]_{\mathcal{C}}$  pour  $x = -3b_1 + 2b_2$  en utilisant le résultat en (a).

Soient  $\mathcal{A} = (\vec{a}_1, \vec{a}_2)$  et  $\mathcal{D} = (\vec{d}_1, \vec{d}_2)$  les bases de  $\mathbb{R}^2$  définies par:

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{d}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \vec{d}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- (c) Calculer la matrice de changement de base  $P_{\mathcal{DA}}$  de  $\mathcal{A}$  vers  $\mathcal{D}$ .
- (d) Calculer la matrice de changement de base  $P_{\mathcal{AD}}$  de  $\mathcal{D}$  vers  $\mathcal{A}$ .

**Solution:**

- (a) La matrice de changement de base de  $\mathcal{B}$  vers  $\mathcal{C}$  est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de base de la base  $\mathcal{B}$  dans la base  $\mathcal{C}$ , donc  $P_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$ .

- (b) L'équation  $x = -3b_1 + 2b_2$  signifie que  $[x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ . Pour trouver  $[x]_{\mathcal{C}}$  il suffit d'utiliser la matrice de changement de base :

$$[x]_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{C}\mathcal{B}}[x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

- (c) Pour trouver la matrice de changement de base de  $\mathcal{A}$  vers  $\mathcal{D}$  il faut écrire les coordonnées des vecteurs  $\vec{a}_1$  et  $\vec{a}_2$  dans la base  $\mathcal{D}$ , c'est à dire trouver les nombres réels  $x_1$  et  $x_2$  tels que  $\vec{a}_1 = x_1 \vec{d}_1 + x_2 \vec{d}_2$  et les nombres réels  $y_1$  et  $y_2$  tels que  $\vec{a}_2 = y_1 \vec{d}_1 + y_2 \vec{d}_2$ . Il suffit pour cela de résoudre les deux systèmes :

$$(\vec{d}_1 \vec{d}_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \vec{a}_1 \quad \text{et} \quad (\vec{d}_1 \vec{d}_2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \vec{a}_2$$

On peut par exemple les résoudre simultanément comme vu en cours. On trouve  $x_1 = -3$ ,  $x_2 = -5$ ,  $y_1 = 1$ ,  $y_2 = 2$  ce qui donne :

$$P_{\mathcal{D}\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

- (d) Pour trouver  $P_{\mathcal{A}\mathcal{D}}$  il suffit d'inverser  $P_{\mathcal{D}\mathcal{A}}$ . On trouve

$$P_{\mathcal{A}\mathcal{D}} = P_{\mathcal{D}\mathcal{A}}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

### Question 10

Soit  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la transformation linéaire définie par  $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ x + 3y \\ x - y \end{pmatrix}$ .

- a) Donner la matrice  $A = [T]_{\mathcal{E}\mathcal{E}}$  de  $T$  par rapport aux bases canoniques  $\mathcal{E}$  de  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^3$ .
- b) Donner la matrice  $B = [T]_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$  de  $T$  par rapport aux bases

$$\mathcal{B} = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ de } \mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{C} = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ de } \mathbb{R}^3.$$

### Solution:

a) La matrice de l'application linéaire  $T$  par rapport aux bases canoniques est

$$A = (T(\vec{e}_1) \quad T(\vec{e}_2)) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) Pour calculer la matrice  $B$ , on commence par calculer les images par  $T$  des vecteurs de la base  $\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ :

$$T(\vec{b}_1) = T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T(\vec{b}_2) = T\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Ensuite, on calcule les coordonnées de ces deux vecteurs dans la base  $\mathcal{C}$  en résolvant les systèmes suivants:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -10 \end{array} \right)$$

et

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array} \right).$$

Ainsi

$$B = [T]_{\mathcal{C}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 4 \\ -10 & -4 \end{pmatrix}.$$

### Question 11

Soit  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'application linéaire donnée par  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x_1 + x_3 \\ 2x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$ .

Soient  $\mathcal{E}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  et  $\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$  la base de  $\mathbb{R}^3$  donnée par

$$\mathcal{B} = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

- Donner la matrice  $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{E}}$  qui représente  $T$  par rapport aux bases  $\mathcal{E}$  (de départ) et  $\mathcal{B}$  (d'arrivée).
- Même question pour  $[T]_{\mathcal{E}\mathcal{B}}$ , dans les bases  $\mathcal{B}$  (de départ) et  $\mathcal{E}$  (d'arrivée).
- Même question pour  $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$ , les bases  $\mathcal{B}$  (de départ) et  $\mathcal{B}$  (d'arrivée).

### Solution:

- a) On commence par prendre les vecteurs de la base de départ  $\mathcal{E}$  et à leur appliquer la transformation  $T$ . On obtient

$$T(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T(\vec{e}_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

qui sont encore exprimés dans la base canonique  $\mathcal{E}$ . Il faut maintenant calculer la matrice de passage de la base  $\mathcal{E}$  à la base  $\mathcal{B}$ , notée  $P_{\mathcal{B}\mathcal{E}}$  (telle que  $[\vec{x}]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}\mathcal{E}}[\vec{x}]_{\mathcal{E}}$ ). On sait, du cours, que  $P_{\mathcal{B}\mathcal{E}}$  est l'inverse de la matrice de passage de la base  $\mathcal{B}$  à la base  $\mathcal{E}$ , notée  $P_{\mathcal{E}\mathcal{B}}$ . Cette dernière est donnée par

$$P_{\mathcal{E}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

(ses colonnes sont les vecteurs de la base  $\mathcal{B}$ , exprimés dans la base  $\mathcal{E}$ ). On obtient que l'inverse est  $P_{\mathcal{E}\mathcal{B}}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = P_{\mathcal{B}\mathcal{E}}$ . On applique alors  $P_{\mathcal{B}\mathcal{E}}$  aux vecteurs  $T(\vec{e}_i)$  (qui sont exprimés dans la base  $\mathcal{E}$ ) et on trouve la matrice  $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{E}}$

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = (P_{\mathcal{B}\mathcal{E}}T(\vec{e}_1) \quad P_{\mathcal{B}\mathcal{E}}T(\vec{e}_2) \quad P_{\mathcal{B}\mathcal{E}}T(\vec{e}_3)) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

- b) On commence par prendre les vecteurs de la base de départ  $\mathcal{B}$  et à leur appliquer la transformation  $T$ .

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ces vecteurs sont exprimés dans la base canonique  $\mathcal{E}$ . La matrice  $[T]_{\mathcal{E}\mathcal{B}}$  est

$$[T]_{\mathcal{E}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- c) On applique  $P_{\mathcal{B}\mathcal{E}}$  aux vecteurs obtenus au point précédent et on obtient la matrice

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = (P_{\mathcal{B}\mathcal{E}}T(\vec{b}_1) \quad P_{\mathcal{B}\mathcal{E}}T(\vec{b}_2) \quad P_{\mathcal{B}\mathcal{E}}T(\vec{b}_3)) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$