

Exercices — Série 8

Mots-clés: bases, dimension d'un (sous)-espace vectoriel, rang, théorème du rang, changement de base, matrice d'une transformation linéaire dans des bases.

Question 1 Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 9 & -7 \\ -1 & 2 & -4 & 1 \\ 5 & -6 & 10 & 7 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- Montrer que les matrices A et B sont équivalentes (selon les lignes).
- Calculer $\text{rg}(A)$ et $\dim \text{Ker} A$.
- Trouver une base pour chacun des sous-espaces $\text{Im} A$, $\text{Ker} A$ et $\text{Ker} A^T$, ainsi que du sous-espace $\text{Lgn}(A)$ engendré par les lignes de A .

Solution:

- On constate que la forme échelonnée réduite des deux matrices est la même, elles sont donc équivalentes.
- En analysant la matrice B on remarque alors que :

Il y a deux colonnes indépendantes ce qui donne $\text{rg}(A) = 2$ (le rang est le nombre de colonnes-pivot) et une base de $\text{Im}(A)$ peut être formée par les deux premières colonnes de A qui correspondent aux colonnes-pivot de sa forme échelonnée. Par le Théorème du rang on trouve $\dim \text{Ker}(A) = 4 - \text{rg}(A) = 2$.

Trouvons les bases.

- Base de $\text{Ker}(A)$: L'équation $A\vec{x} = 0$ est équivalente à $B\vec{x} = 0$; une base de $\text{Ker}(A)$ est donnée par : $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ et donc $\dim \text{Ker}(A) = 2$, ce qui confirme le calcul effectué ci-dessus.

Base de $\text{Lgn}(A)$: Une base du sous-espace engendré par les lignes de A est donnée par les lignes non nulles de la forme échelonnée B :

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} \right)$$

Base de $\text{Im}(A)$ et $\text{Ker}(A^T)$: On a vu plus haut que les deux premières colonnes de A forment une base de $\text{Im}(A)$. Enfin $\text{Im}(A)$ coïncide avec le sous-espace engendré par les lignes de A^T . Puisqu'il est de dimension 2, le Théorème du rang nous apprend que le noyau de A^T est de dimension $3 - 2 = 1$. On trouve que $\text{Ker}(A^T)$ est engendré par $\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Question 2 Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 6 \\ -4 & 12 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}$. Alors $\text{Im}(A)$ est un sous-espace de \mathbb{R}^4 de dimension 1.



VRAI



FAUX

Solution: La matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 6 \\ -4 & 12 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}$ donne une application linéaire $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$.

Ainsi $\text{Im}(A)$ est un sous-espace de \mathbb{R}^4 , pas de \mathbb{R}^2 . Pour trouver sa dimension, il faut analyser les colonnes de A . On constate qu'elles sont proportionnelles et donc que la dimension de $\text{Im}(A)$ est 1.

Question 3 Soit V un espace vectoriel et $v_1, \dots, v_k \in V$. Alors



Si la famille $\{v_1, \dots, v_k\}$ engendre l'espace vectoriel V , alors $\dim V \geq k$.



Si la famille $\{v_1, \dots, v_k\}$ engendre l'espace vectoriel V , alors $\dim V = k$.



Si la famille $\{v_1, \dots, v_k\}$ est libre, alors $\dim V \geq k$.



Si la famille $\{v_1, \dots, v_k\}$ est libre, alors $\dim V = k$.

Solution: La réponse est: Si la famille $\{v_1, \dots, v_k\}$ est libre, alors $\dim V \geq k$. En effet, si la famille $\{v_1, \dots, v_k\}$ est libre, on peut *compléter* cette famille en une base et cette base aura donc au moins k éléments. Autrement dit, la dimension de V est k au minimum ($\dim V \geq k$). Alors que, si la famille $\{v_1, \dots, v_k\}$ engendre V , on peut *extraire* une base de cette famille et cette base aura donc au plus k éléments. Autrement dit, la dimension de V est k au maximum ($\dim V \leq k$).

Question 4 Il existe une matrice A de taille 3×7 telle que:

☐ $\dim \text{Ker}(A) = 4$ et $\text{rg}(A) \leq 2$

☒ $\dim \text{Ker}(A) = 5$ et $\text{rg}(A) = 2$

☐ $\dim \text{Ker}(A) = 2$ et $\text{rg}(A) \leq 4$

☐ $\dim \text{Ker}(A) = 3$ et $\text{rg}(A) = 4$

Solution: La matrice A représente une application linéaire $\mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Par conséquent, l'image de A est un sous-espace de \mathbb{R}^3 , c'est donc un sous-espace de dimension ≤ 3 . Le Théorème du rang affirme que

$$\dim \text{Ker}(A) = 7 - \text{rg}(A) \geq 7 - 3 = 4$$

ce qui élimine deux affirmations (celles qui disent que $\dim \text{Ker}(A) \leq 3$). Intuitivement c'est clair: il faut "éliminer" au moins un sous-espace de dimension 4 pour envoyer un espace de dimension 7 dans \mathbb{R}^3 . Enfin le Théorème du rang s'écrit aussi $\dim \text{Ker}(A) + \text{rg}(A) = 7$, ce qui élimine aussi l'affirmation $\dim \text{Ker}(A) = 4$ et $\text{rg}(A) \leq 2$ car, dans ce cas, la somme ne peut pas être égale à 7.

Question 5 Soit A la matrice de la projection orthogonale $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sur le plan horizontal $\text{Vect}\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. Alors $\dim \text{Ker}(A) = 1$ et $\text{rg}(A) = 2$.



VRAI



FAUX

Solution: On a $\dim \text{Ker} A = 1$, puisque le noyau est la droite $\text{Vect}(\vec{e}_3)$ et $\dim \text{Im} A = \text{rg}(A) = 2$ puisque l'image de A est le plan Oxy , un sous-espace de \mathbb{R}^3 de dimension 2.

Question 6 Soit A une matrice inversible de taille 5×5 . Laquelle des affirmations suivantes est vraie?

☐ $\text{Ker}(A)$ est vide

☒ Les lignes de A sont linéairement indépendantes

☐ Le rang de A est strictement plus petit que 5

☐ Les colonnes de A n'engendrent pas \mathbb{R}^5

Solution: La forme échelonnée d'une matrice inversible a un pivot dans chaque ligne et chaque colonne. Ainsi les colonnes, et les lignes également, forment une base de \mathbb{R}^5 . Donc en particulier elles engendrent \mathbb{R}^5 et elles sont linéairement indépendantes. L'application linéaire que représente A est bijective, et donc le noyau est *nul* (pas vide!), et l'image de A est \mathbb{R}^5 tout entier, donc le rang de A vaut 5.

Question 7 Soit $T: \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $T(p) = p(-1) + p(0) + p(1)$. Alors

☐ $\dim \text{Ker}(T) = 1$ et $\text{rg}(T) = 2$

☐ $\dim \text{Ker}(T) = 1$ et $\text{rg}(T) = 1$

☐ T n'est pas linéaire

☒ $\dim \text{Ker}(T) = 2$ et $\text{rg}(T) = 1$

Solution: L'application T est linéaire et, plus explicitement, on a $T(a+bt+ct^2) = 3a + 2c$. En particulier, T n'est pas l'application nulle et donc la dimension de l'image de T est 1. Par le théorème du rang, celle du noyau est 2.

Question 8 Soit $T: \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $T(p) = p(-1) + p(0) + p(1)$. Une base du noyau de T est donnée par $\{-2 + t + 3t^2, 2 - 3t^2\}$.

☒ VRAI ☐ FAUX

Solution: Par la question précédente, la dimension du noyau vaut 2. Il faut donc 2 polynômes linéairement indépendants pour engendrer le noyau. On remarque que $-2 + t + 3t^2$ et $2 - 3t^2$ sont des polynômes linéairement indépendants qui appartiennent au noyau de T . Ils forment donc une base du noyau.

Question 9

Soient $\mathcal{B} = (b_1, b_2)$ et $\mathcal{C} = (c_1, c_2)$ deux bases d'un espace vectoriel V . Supposons que $b_1 = 6c_1 - 2c_2$ et $b_2 = 9c_1 - 4c_2$.

(a) Calculer la matrice de changement de base $P_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$ de \mathcal{B} vers \mathcal{C} .

(b) Trouver $[x]_{\mathcal{C}}$ pour $x = -3b_1 + 2b_2$ en utilisant le résultat en (a).

Soient $\mathcal{A} = (\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ et $\mathcal{D} = (\vec{d}_1, \vec{d}_2)$ les bases de \mathbb{R}^2 définies par:

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{d}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \vec{d}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(c) Calculer la matrice de changement de base $P_{\mathcal{D}\mathcal{A}}$ de \mathcal{A} vers \mathcal{D} .

(d) Calculer la matrice de changement de base $P_{\mathcal{A}\mathcal{D}}$ de \mathcal{D} vers \mathcal{A} .

Solution:

(a) La matrice de changement de base de \mathcal{B} vers \mathcal{C} est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de base de la base \mathcal{B} dans la base \mathcal{C} , donc $P_{\mathcal{C}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$.

- (b) L'équation $x = -3b_1 + 2b_2$ signifie que $[x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Pour trouver $[x]_{\mathcal{C}}$ il suffit d'utiliser la matrice de changement de base :

$$[x]_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{CB}}[x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

- (c) Pour trouver la matrice de changement de base de \mathcal{A} vers \mathcal{D} il faut écrire les coordonnées des vecteurs \vec{a}_1 et \vec{a}_2 dans la base \mathcal{D} , c'est à dire trouver les nombres réels x_1 et x_2 tels que $\vec{a}_1 = x_1\vec{d}_1 + x_2\vec{d}_2$ et les nombres réels y_1 et y_2 tels que $\vec{a}_2 = y_1\vec{d}_1 + y_2\vec{d}_2$. Il suffit pour cela de résoudre les deux systèmes :

$$(\vec{d}_1 \ \vec{d}_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \vec{a}_1 \quad \text{et} \quad (\vec{d}_1 \ \vec{d}_2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \vec{a}_2$$

On peut par exemple les résoudre simultanément comme vu en cours. On trouve $x_1 = -3$, $x_2 = -5$, $y_1 = 1$, $y_2 = 2$ ce qui donne :

$$P_{\mathcal{DA}} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

- (d) Pour trouver $P_{\mathcal{AD}}$ il suffit d'inverser $P_{\mathcal{DA}}$. On trouve

$$P_{\mathcal{AD}} = P_{\mathcal{DA}}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

Question 10

Soit $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la transformation linéaire définie par $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ x + 3y \\ x - y \end{pmatrix}$.

- a) Donner la matrice $A = [T]_{\mathcal{EE}}$ de T par rapport aux bases canoniques \mathcal{E} de \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 .
- b) Donner la matrice $B = [T]_{\mathcal{CB}}$ de T par rapport aux bases

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ de } \mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ de } \mathbb{R}^3.$$

Solution:

a) La matrice de l'application linéaire T par rapport aux bases canoniques est

$$A = (T(\vec{e}_1) \quad T(\vec{e}_2)) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) Pour calculer la matrice B , on commence par calculer les images par T des vecteurs de la base $\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \vec{b}_2)$:

$$T(\vec{b}_1) = T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T(\vec{b}_2) = T \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Ensuite, on calcule les coordonnées de ces deux vecteurs dans la base \mathcal{C} en résolvant les systèmes suivants:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -10 \end{array} \right)$$

et

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array} \right).$$

Ainsi

$$B = [T]_{\mathcal{C}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 4 \\ -10 & -4 \end{pmatrix}.$$

Question 11

Soit $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire donnée par $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x_1 + x_3 \\ 2x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$.

Soient \mathcal{E} la base canonique de \mathbb{R}^3 et $\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ la base de \mathbb{R}^3 donnée par

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

- Donner la matrice $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{E}}$ qui représente T par rapport aux bases \mathcal{E} (de départ) et \mathcal{B} (d'arrivée).
- Même question pour $[T]_{\mathcal{E}\mathcal{B}}$, dans les bases \mathcal{B} (de départ) et \mathcal{E} (d'arrivée).
- Même question pour $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$, les bases \mathcal{B} (de départ) et \mathcal{B} (d'arrivée).

Solution:

- a) On commence par prendre les vecteurs de la base de départ \mathcal{E} et à leur appliquer la transformation T . On obtient

$$T(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T(\vec{e}_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

qui sont encore exprimés dans la base canonique \mathcal{E} . Il faut maintenant calculer la matrice de passage de la base \mathcal{E} à la base \mathcal{B} , notée $P_{\mathcal{B}\mathcal{E}}$ (telle que $[\vec{x}]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}\mathcal{E}}[\vec{x}]_{\mathcal{E}}$). On sait, du cours, que $P_{\mathcal{B}\mathcal{E}}$ est l'inverse de la matrice de passage de la base \mathcal{B} à la base \mathcal{E} , notée $P_{\mathcal{E}\mathcal{B}}$. Cette dernière est donnée par

$$P_{\mathcal{E}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

(ses colonnes sont les vecteurs de la base \mathcal{B} , exprimés dans la base \mathcal{E}). On obtient que l'inverse est $P_{\mathcal{E}\mathcal{B}}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = P_{\mathcal{B}\mathcal{E}}$. On applique alors $P_{\mathcal{B}\mathcal{E}}$ aux vecteurs $T(\vec{e}_i)$ (qui sont exprimés dans la base \mathcal{E}) et on trouve la matrice $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{E}}$

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = (P_{\mathcal{B}\mathcal{E}}T(\vec{e}_1) \quad P_{\mathcal{B}\mathcal{E}}T(\vec{e}_2) \quad P_{\mathcal{B}\mathcal{E}}T(\vec{e}_3)) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

- b) On commence par prendre les vecteurs de la base de départ \mathcal{B} et à leur appliquer la transformation T .

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ces vecteurs sont exprimés dans la base canonique \mathcal{E} . La matrice $[T]_{\mathcal{E}\mathcal{B}}$ est

$$[T]_{\mathcal{E}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- c) On applique $P_{\mathcal{B}\mathcal{E}}$ aux vecteurs obtenus au point précédent et on obtient la matrice

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = \left(P_{\mathcal{B}\mathcal{E}}T(\vec{b}_1) \quad P_{\mathcal{B}\mathcal{E}}T(\vec{b}_2) \quad P_{\mathcal{B}\mathcal{E}}T(\vec{b}_3) \right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$