

Série 5

Mots-clés: déterminants, matrices élémentaires.

Question 1

Calculer le déterminant des matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Solution:

L'idée est de développer par rapport à une ligne ou une colonne avec beaucoup de zéros pour faire le moins de calculs possible.

A: On développe par rapport à la 1ère colonne de A et on obtient

$$\det A = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 4.$$

B: On développe par rapport à la 2ème colonne de B et on trouve $\det B = 0$.

On peut aussi remarquer que la matrice est non inversible (deux colonnes égales), et donc $\det B = 0$.

C: En développant par rapport à la 3ème colonne on trouve $\det C = 0$. On peut aussi remarquer que la matrice est non inversible (deux colonnes égales), et donc $\det C = 0$.

D: On développe par rapport à la 1ère colonne de D . On obtient

$$\det D = 9 \cdot \det \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 6 \cdot \det \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = 0.$$

E: On développe par rapport à la 1ère colonne de E . On obtient

$$\det E = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 7 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = 84.$$

Question 2

a) Calculer le déterminant suivant : $\begin{vmatrix} 6 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$

b) Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} a & b & a \\ b & a & b \\ a+b & a+b & a+b \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ a & a+b & c \\ a & b & a \end{vmatrix}.$$

c) Calculer le déterminant de la matrice $A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$. Comment le déterminant dépend t-il de l'angle φ ? Pourquoi ?

d) Soient $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 4 & 18 & 17 & 23 \\ 49 & 1 & 72 & 10 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 18 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 18 \end{pmatrix}$. Calculer $\det(AB)$.

Solution:

a) La réponse est 11. Il est plus simple de développer par rapport à la deuxième ligne:

$$\begin{vmatrix} 6 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 11.$$

b) Premier déterminant: 0 car la troisième ligne est la somme des deux premières.
Second déterminant: a^3 . On développe par rapport à la première ligne:

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ a & a+b & c \\ a & b & a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} a+b & c \\ b & a \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} a & c \\ a & a \end{vmatrix} = a(a^2+ab-bc) - b(a^2-ac) = a^3.$$

c) On a que $\det A = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$ est indépendant de l'angle φ . Toutes les matrices de rotation vérifient la propriété $\det A = 1$.

d) Vu que les lignes de B sont linéairement dépendantes (la deuxième est le double de la troisième) on a que $\det B = 0$, donc $\det(AB) = \det A \cdot \det B = 0$.

Question 3

Calculer le déterminant des matrices élémentaires suivantes. Indiquer à quelle opération élémentaire chaque matrice correspond.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solution:

On trouve $\det A = 1$ (A ajoute à la quatrième ligne la troisième ligne multipliée par α), $\det B = -1$ (B échange les lignes 1 et 2) et $\det C = \alpha$ (C multiplie la première ligne par $\alpha \neq 0$).

Question 4

Étudier, en fonction du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$, l'inversibilité des matrices $A(\lambda)$ et $B(\lambda)$ ci-dessous, en calculant leur déterminant.

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & \lambda \end{pmatrix} \quad B(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & \lambda \\ 3 & 2 & 1 - \lambda \end{pmatrix}$$

Solution:

Selon le cours, on sait que $A(\lambda)$ est inversible si et seulement si $\det(A(\lambda)) \neq 0$. Or, en développant selon la deuxième ligne, on a

$$\det(A(\lambda)) = (-1) \cdot (1 \cdot \lambda - 2 \cdot 0) = -\lambda.$$

On a donc que $A(\lambda)$ est inversible si et seulement si $\lambda \neq 0$.

On procède de même pour $B(\lambda)$ en développant selon la première ligne:

$$\det(B(\lambda)) = 5(1 - \lambda) - 2\lambda - (-1)(-3\lambda) = 5 - 10\lambda$$

Ainsi $\det(B(\lambda)) = 5 - 10\lambda$, cette matrice est donc inversible si et seulement si $\lambda \neq \frac{1}{2}$.

Question 5 Calculer le déterminant de la matrice ci-dessous, en la transformant progressivement à l'aide de transformations élémentaires.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & 7 \\ 2 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

Solution:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & 7 \\ 2 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 9 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & 7 \\ 0 & -3 & -16 & -9 \\ 0 & 0 & -12 & -8 \\ 0 & 0 & 5 & -9 \end{pmatrix} = \\ &= -12 \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & 7 \\ 0 & -3 & -16 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{37}{3} \end{pmatrix} = -444 \end{aligned}$$

Question 6

Soit a un paramètre réel et A la matrice donnée par

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 3 \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Alors A est singulière (c'est-à-dire non inversible) si

- $a \notin \{1, 3\}$
- $a \in \{1, -1\}$
- $a \in \{1, 3\}$
- $a \notin \{1, -1\}$

Solution: On calcule le déterminant de A et on trouve $\det(A) = -6(a^2 - 1)$. Ainsi, $\det(A) = 0$ (la matrice n'est pas inversible) si et seulement si $a = \pm 1$.

Question 7

- 1) Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Alors

- $\det(A) = 0$ $\det(A) = 9$
 $\det(A^{-1}) = \frac{1}{24}$ $\det(A^T) = -24$

- 2) Soit A la matrice 2×2 d'une homothétie de rapport 4 dont le centre est l'origine. Alors

- $\det(A) = 4$ $\det(A) = 16$
 $\det(A) = 8$ $\det(A) = 0$

- 3) Soit T l'application linéaire du plan \mathbb{R}^2 obtenue en effectuant d'abord une symétrie axiale d'axe $x = y$, puis la projection orthogonale sur l'axe $x = 0$. Soit A la matrice 2×2 de cette application linéaire.

- $\det(A) = 1$ $\det(A) = 0$
 $\det(A) = -2$ $\det(A) = -1$

- 4) Soit A une matrice de taille 5×5 . On change le signe de chaque coefficient pour obtenir la matrice B . Alors on a

- $\det(A) = -\det(B)$ $\det(B) = 0$
 $\det(A) = \det(B)$ $\det(A) = 5 \det(B)$

Solution:

- 1) On a $\det(A) = 24$ (produit des coefficients diagonaux), donc aussi $\det(A^T) = 24$. Par contre $\det(A^{-1}) = \frac{1}{24}$.
- 2) La matrice A est diagonale, égale à $4I_2$. Ainsi $\det(A) = 4 \cdot 4 = 16$.
- 3) Cette application n'est pas inversible. En effet le vecteur \vec{e}_2 est transformé en \vec{e}_1 par la symétrie axiale, puis en $\vec{0}$ par la projection sur l'axe $x = 0$ (qui est l'axe vertical). Le système homogène $A\vec{x} = \vec{0}$ a donc une solution non nulle. Par conséquent $\det(A) = 0$.
- 4) Par linéarité du déterminant comme fonction de chaque ligne, le déterminant change de signe chaque fois que l'on multiplie une ligne par (-1) . On change ici le signe de chacune des cinq lignes si bien que $\det(A) = -\det(B)$.

Question 8 Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

- Si B est obtenue en échangeant deux lignes de A , alors $\det(B) = \det(A)$.
- Si les colonnes de A sont linéairement dépendantes, alors $\det(A) = 0$.
- Le déterminant de A est le produit des éléments diagonaux de A .
- Soit A une matrice carrée telle que $\det(A^{13}) = 0$. Alors A est inversible.
- Si deux lignes d'une matrice A de taille 7×7 sont les mêmes, alors $\det(A) = 0$.
- Si A est une matrice carrée dont le déterminant vaut 2, alors $\det(A^3) = 6$.
- Si A et B sont des matrices de taille $n \times n$ telles que $\det(A) = 2$ et $\det(B) = 5$, alors $\det(A + B) = 7$.
- Si une matrice A est triangulaire inférieure, alors son déterminant s'obtient comme le produit des éléments de sa diagonale.
- Soient A une matrice $n \times n$ et $k \in \mathbb{R}$. Alors, $\det(kA) = k^n \det(A)$.

Solution:

- Faux. Si B est obtenue en intervertissant deux lignes de A , alors $\det(B) = -\det(A)$ en général. Par exemple $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ vérifient $\det(A) = 1$ et $\det(B) = -1$.
- Vrai. Si les colonnes de A sont linéairement dépendantes, alors la matrice A n'est pas inversible et par un résultat du cours on a que $\det(A) = 0$.
- Faux. Le déterminant de A n'est pas égal au produit des éléments diagonaux de A comme le montre l'exemple de la matrice B ci-dessus.
- Faux. Soit A une matrice carrée telle que $\det(A^{13}) = 0$. Alors $\det(A)^{13} = 0$ et donc $\det(A) = 0$ ce qui montre que A n'est pas inversible.
- Vrai. Si deux lignes d'une matrice A de taille 7×7 sont les mêmes, alors $\det(A) = -\det(A)$ (en échangeant les deux lignes qui sont égales) et donc $\det(A) = 0$.
- Faux. Si A est une matrice carrée dont le déterminant vaut 2, alors $\det(A^3) = \det(A)^3 = 2^3 = 8 \neq 6$.

- g) Faux. Prenons $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a bien $\det(A) = 2$ et $\det(B) = 5$, tandis que $\det(A + B) = 18$.
- h) Vrai. Si une matrice A est triangulaire inférieure, alors en développant successivement par rapport à la 1ère ligne, 2ème, jusqu'à la n -ème on obtient bien le produit des éléments de sa diagonale.
- i) Vrai. Soient A une matrice $n \times n$ et $k \in \mathbb{R}$. Alors, $\det(kA) = k^n \det A$. En effet, la matrice kA s'obtient en multipliant chaque ligne de A par le nombre k . Puisqu'il y a n lignes on aura donc multiplié le déterminant de A par $\underbrace{k \cdot \dots \cdot k}_{n \text{ fois}} = k^n$.

Question 9

a) Soient $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Calculer l'aire du parallélogramme construit sur \vec{a} et \vec{b} .

b) Soient $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Calculer le volume du parallélépipède construit sur \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} .

Solution:

a) L'aire cherchée est égale à $\left| \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right| = 8 - 3 = 5$.

b) Le volume cherché est égal à $\left| \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \right| = 4$.