

Série 4

Mots-clés: calcul matriciel, produit de matrices, puissance d'une matrice carrée, transposée, inverse d'une matrice carrée, matrices élémentaires.

Question 1

Considérons les matrices suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Calculer les produits suivants (s'ils existent).

Si les produits n'existent pas, expliquer pourquoi.

a) $AB, BA, AC, CA, BC, CB, CD, EC, EA$

b) $AA^T, A^T A, BA^T, BC^T, C^T A, BD^T, D^T B$

Solution:

$$\text{a) } AB = \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 9 \end{pmatrix}, AC \text{ n'existe pas: } (2 \times 3) \times (2 \times 2),$$

$$CA = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 4 & 5 & 8 \end{pmatrix}, BC = \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 6 & 12 \\ 9 & 15 \end{pmatrix},$$

CB n'existe pas: $(2 \times 2) \times (3 \times 2)$,

CD n'existe pas: $(2 \times 2) \times (3 \times 1)$,

$EC = \begin{pmatrix} 9 & 15 \end{pmatrix}, EA = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 9 \end{pmatrix}.$

$$\text{b) } AA^T = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, A^T A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}, BA^T \text{ n'existe pas: } (3 \times 2) \times (3 \times 2),$$

$$BC^T = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 8 & 10 \\ 13 & 14 \end{pmatrix}, C^T A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 6 & 6 & 9 \end{pmatrix},$$

BD^T n'existe pas: $(3 \times 2) \times (1 \times 3)$, $D^T B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \end{pmatrix}.$

Question 2

a) On se donne

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & k \end{pmatrix}.$$

Pour quelle(s) valeur(s) de $k \in \mathbb{R}$ a-t-on $AB = BA$?

b) Soit

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que $MN = MT$, bien que N soit différent de T .

Solution:

a) On a $AB = BA$ pour $k = 9$ seulement. On voit que c'est une condition nécessaire en calculant les coefficients $(1, 2)$ des deux matrices. On trouve respectivement $12 - 4k$ et -24 . On s'assure ensuite que les autres coefficients sont égaux pour ce choix de k .

b) On calcule les deux produits matriciels MN et NT . On trouve dans les deux cas $\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 21 & -6 \end{pmatrix}$. Ceci donne un nouvel exemple de l'impossibilité de simplifier un produit matriciel en "divisant par M ", le problème étant bien sûr qu'on ne peut pas diviser par une matrice (en général).

Question 3 Soit $T_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$, et $T_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

définie par $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto x_1 + x_2 + x_3$.

a) Écrire les matrices canoniques associées à T_1 et T_2 et le produit matriciel associé à la composition $T_2 \circ T_1$ telle que $T_2 \circ T_1(\vec{x}) = T_2(T_1(\vec{x}))$ pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$.

b) Quel est le domaine de définition de $T_2 \circ T_1$? Quel est le domaine d'arrivée?

Solution:

a) $T_1(e_1) = T_1\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $T_1(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Donc $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

De même $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi la composition $T_2 \circ T_1$ correspond à $A_2 A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$.

- b) On a $T_2 \circ T_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Le domaine de définition est \mathbb{R}^2 . Le domaine d'arrivée est \mathbb{R} .

Question 4 Calculer les produits matriciels suivants, et indiquer les compositions correspondantes de transformations linéaires, avec les dimensions des espaces, $T_{AB} : \mathbb{R}^{\cdots} \xrightarrow{T_{\cdots}} \mathbb{R}^{\cdots} \xrightarrow{T_{\cdots}} \mathbb{R}^{\cdots}$.

a) AB , où $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

b) ABC , où $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

c) ABC , où $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Solution:

a) $AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $T_{AB} : \mathbb{R}^3 \xrightarrow{T_B} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{T_A} \mathbb{R}^3$.

b) $ABC = \begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}$, $\vec{T}_{ABC} : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{T_C} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{T_B} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{T_A} \mathbb{R}^2$.

c) $ABC = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 6 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $T_{ABC} : \mathbb{R}^3 \xrightarrow{T_C} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{T_B} \mathbb{R} \xrightarrow{T_A} \mathbb{R}^3$.

Question 5

- a) Dans le plan, soit S la symétrie axiale d'axe $x = -y$. Décrire son inverse s'il existe. Quelles sont les matrices de ces applications?
- b) Même question pour H l'homothétie de rapport 3.
- c) Même question pour R_θ la rotation d'angle θ centrée en l'origine.

Solution:

a) L'inverse de S est l'application S elle-même. La matrice associée est

$$S = S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) L'inverse de H est une homothétie de rapport $\frac{1}{3}$. Les matrices associées sont

$$H = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad H^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

c) L'inverse de R_θ est $R_{-\theta}$. Les matrices associées sont

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix},$$

$$(R_\theta)^{-1} = R_{-\theta} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

$$\text{On a bien } R_\theta \cdot R_{-\theta} = \begin{pmatrix} \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) & 0 \\ 0 & \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Question 6

a) Déterminer les matrices élémentaires 3×3 suivantes :

- E_1 , qui permute les deuxièmes et troisièmes lignes;
- E_2 , qui multiplie la deuxième ligne par 8;
- E_3 , qui ajoute 7 fois la première ligne à la troisième.

b) Les matrices E_1, E_2 et E_3 sont elles inversibles ? Pourquoi ? Si oui, donner leur inverse et l'inverse du produit $E_1 E_2 E_3$.

c) A quelle opération élémentaire chacune de ces matrices suivantes se rapporte-t-elle?

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solution:

(1) On a

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (2) Chaque matrice est inversible car chaque opération élémentaire possède son propre inverse :

$$E_1 = E_1^{-1}, \quad E_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$(E_1 E_2 E_3)^{-1} = E_3^{-1} E_2^{-1} E_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/8 \\ -7 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (3) E_1 : Multiplier à gauche par cette matrice correspond à ajouter k fois la deuxième ligne à la troisième.

E_2 : Cette matrice multiplie la deuxième ligne par k .

E_3 : Cette matrice permute les deux premières lignes.

E_4 : Cette matrice permute la première et la troisième ligne.

Question 7 On considère les matrices élémentaires de taille 4×4 .

- Donner la matrice élémentaire qui permet de permuter les lignes 2 et 4.
- Donner la matrice élémentaire qui ajoute cinq fois la ligne 1 à la ligne 3.
- Donner la matrice élémentaire qui multiplie la ligne 3 par 17.
- Donner les inverses des matrices trouvées aux questions a, b et c.

Solution:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{b) } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{c) } C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

d) Pour inverser la transformation associée à A , on considère la même transfor-

mation qui permute les lignes 2 et 4, ainsi $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Pour inverser la transformation associée à B , on considère la transformation

qui soustrait cinq fois la ligne 1 à la ligne 3, ainsi $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Pour inverser la transformation associée à C , on considère la transformation

qui divise la ligne 3 par 17, ainsi $C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Question 8

Déterminer lesquelles des matrices suivantes sont inversibles. Utiliser le moins de calculs possible et justifier votre réponse. On ne demande pas le calcul de l'inverse!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ -2 & -6 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 8 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 8 & 0 \\ 4 & 7 & 9 & 10 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 7 \\ -1 & 5 & -8 \end{pmatrix}.$$

Solution: La matrice A est une matrice *carrée* de dimension 4×4 . Il suffit de la mettre sous forme échelonnée pour voir qu'elle a 4 pivots :

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Un théorème du cours montre que A est inversible.

La matrice B est carrée et de dimension 4×4 . De plus B est déjà sous forme échelonnée, on voit donc directement qu'elle a 4 pivots et donc qu'elle est inversible.

Si on transpose la matrice C on trouve :

$$C^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

La transposée de C est donc une matrice carrée de dimension 4×4 qui a 4 pivots. Donc C^T est inversible. Donc C est inversible.

Par contre la matrice D est de dimension 4×3 et ne peut pas être inversible.

Question 9

- a) Est-ce que la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible? Si oui calculer son inverse.
- b) Trouver les solutions du système homogène $Ax = 0$.
- c) Trouver les solutions du système $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Solution:

- a) Oui, on le voit en échelonnant la matrice augmentée $(A | I_3)$:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \\ & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \\ & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Comme A est inversible, l'unique solution de $A\vec{x} = \vec{0}$ est $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

c) Comme A est inversible, la seule solution à ce système est $x = A^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Question 10 Pour quelles valeurs des paramètres a, b, c la matrice A ci-dessous est-elle inversible?

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & c & 1 \end{pmatrix}$$

Donner l'inverse de A lorsque cela est possible.

Solution: Une forme échelonnée de A est donnée par

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 - c^2 \end{pmatrix}$$

Ainsi A est inversible si et seulement si $a \neq 0$, $b \neq 0$ et $c \neq \pm 1$. Son inverse est

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1-c^2} & -\frac{c}{1-c^2} \\ 0 & 0 & -\frac{c}{1-c^2} & \frac{1}{1-c^2} \end{pmatrix}$$

Question 11 Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

a) Soient A , B et C trois matrices. Alors $(AB)C = (AC)B$.

☒ Faux

☐ Vrai

b) Si A est une matrice inversible, alors A^{-1} l'est aussi.

☐ Faux

☒ Vrai

c) Le produit de plusieurs matrices inversibles de taille $n \times n$ n'est pas inversible.

☒ Faux

☐ Vrai

d) Si A est une matrice inversible de taille $n \times n$, alors l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ est compatible quel que soit $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$.

☐ Faux

☒ Vrai

Solution:

a) Faux. Prenons $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = C$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Alors on a

$$(AB)C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

tandis que

$$(AC)B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Vrai. Soit A une matrice inversible de taille $n \times n$, alors il existe une matrice, notée A^{-1} , telle que $AA^{-1} = I_n = A^{-1}A$. Ces équations, lues de droite à gauche, disent que la matrice A^{-1} est aussi inversible et que son inverse vaut A , ainsi $(A^{-1})^{-1} = A$.

c) Faux. Si A et B sont inversibles, d'inverses respectifs A^{-1} et B^{-1} , alors le produit AB est inversible et son inverse vaut $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. En effet $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = I_n = (B^{-1}A^{-1})(AB)$. Donc le produit de plusieurs matrices inversibles de taille $n \times n$ est toujours inversible.

d) Vrai. Soit A une matrice inversible de taille $n \times n$ et $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ alors l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ admet une (unique) solution qui est $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$.

Question 12

a) Les matrices sont de taille $n \times n$.

- ☐ Soient A, B deux matrices inversibles, alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.
- ☐ Soient A, B deux matrices inversibles, alors $A + B$ est inversible.
- ☐ Il existe une matrice A inversible et une matrice B qui ne l'est pas telles que AB est inversible.
- ☒ Soient A, B deux matrices telles que A ou B n'est pas inversible. Alors AB n'est pas inversible.

b) Soit A une matrice $m \times n$ et B une matrice $n \times p$.

- ☐ Si $m = n = p$, $A = A^T$ et $B = B^T$, alors $(AB)^T = AB$.
- ☐ Si $m = n$ et $A = A^T$, alors A est diagonale.
- ☒ Alors $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ si A est inversible.
- ☐ Alors $(AB)^T = A^T B^T$.

c) Soient A, B, C trois matrices $n \times n$.

- ☐ Si A est inversible et $AC = BC$, alors $A = B$.
- ☐ Si $C = C^T$ et $AC = BC$, alors $A = B$.
- ☒ Si C est inversible et $AC = BC$, alors $A = B$.
- ☐ Si $AC = BC$, alors $A = B$.

Solution:

- a) Si AB est inversible, alors l'application linéaire représentée par AB est bijective. On en déduit que B est injective et A est surjective, donc A, B sont bijectives, donc inversibles, vu que ce sont des matrices carrées. Ainsi, si A ou B n'est pas inversible, AB n'est pas inversible. Pour voir que la somme de matrices inversibles n'est pas toujours inversible, prendre $A = I$ et $B = -I$. Puis, il est vrai que si A et B sont inversibles, alors AB est inversible, mais l'inverse est donné par $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- b) La formule correcte est $(AB)^T = B^T A^T$ et donc on a $(AB)^T = BA$ dans ce cas-ci. Ceci élimine deux réponses. En cours on a vu que A est inversible si et seulement si A^T l'est. L'égalité $A = A^T$ dit seulement que la matrice est symétrique.

c) Pour voir que les points 1, 2 et 4 sont faux, prendre, par exemple,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le point 3 est vrai, car si on applique C^{-1} à droite de chaque côté de l'équation $AC = BC$, on obtient $A = B$.