Série 3

Mots-clés: indépendance linéaire, familles de vecteurs linéairement (in)dépendantes, transformations matricielles, applications linéaires, matrice d'une application linéaire, surjectivité, injectivité, bijectivité.

Question 1 Les vecteurs suivants sont-ils linéairement indépendants? Engendrent-ils $\mathbb{R}^3$ (questions a) et b)) ou $\mathbb{R}^2$ (question c)) ?

a) $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

c) $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Solution:

a) On cherche une combinaison linéaire des vecteurs telle que

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ce qui conduit au système

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & & & = & 0 \\ 2x_1 & & & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & & & & & = & 0 \end{array} \right. .$$

Ce système possède uniquement la solution triviale $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, donc les vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ et $\vec{v}_3$ sont linéairement indépendants, et ils engendrent $\mathbb{R}^3$.

b) $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ et $\vec{v}_3$ ne sont pas linéairement indépendants. En effet, $\vec{v}_1 = -\vec{v}_2$. Ainsi ces trois vecteurs n'engendrent pas $\mathbb{R}^3$.

c) $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ et $\vec{v}_3$ ne sont pas linéairement indépendants, car ils sont de taille 2 strictement inférieure au nombre 3 de vecteurs. Cependant, ces vecteurs sont linéairement indépendants deux à deux, donc ils engendrent $\mathbb{R}^2$.

Remarque: On utilise les faits suivants: Soit A de taille $m \times n$.

Les colonnes de A engendrent $\mathbb{R}^m$

$\Leftrightarrow$ *Pour tout vecteur $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$, l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ a une solution $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ (tout vecteur $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ peut s'exprimer comme combinaison linéaire des colonnes de A).*

$\Leftrightarrow$ *La forme échelonnée de la matrice augmentée $(A \mid b)$ n'a pas de ligne de la forme $\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & c \end{bmatrix}$ avec c non nul (car le système est compatible) ; la forme échelonnée de A n'a pas de ligne nulle $\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ (car $A\vec{x} = \vec{b}$ a une solution pour tout $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$).*

$\Leftrightarrow$ *Chaque ligne a une position pivot.*

Question 2 Soient

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ h \end{pmatrix}$$

- ☐ Le vecteur $\vec{v_3}$ dépend linéairement des vecteurs $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ pour $h = 2$.
- ■ Pour tout $h \in \mathbb{R}$, le vecteur $\vec{v_2}$ dépend linéairement des vecteurs $\vec{v_1}$ et $\vec{v_3}$.
- ☐ L'ensemble $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$ est linéairement indépendant pour $h \neq -2$.
- ☐ L'ensemble $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$ est linéairement indépendant pour $h = -2$.

Solution: La seule bonne réponse est la deuxième. On a

$$\begin{pmatrix} \vec{v_1} & \vec{v_2} & \vec{v_3} \end{pmatrix} \sim_{\substack{L_2 - 3L_1 \\ L_3 + 2L_1}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & h+2 \end{pmatrix}$$

La deuxième ligne montre que le système $\alpha_1 \vec{v_1} + \alpha_2 \vec{v_2} = \vec{v_3}$ est incompatible et donc $\vec{v_3}$ ne peut pas se trouver dans Vect$\{\vec{v_1}, \vec{v_2}\}$. En fait, on voit rapidement que $\vec{v_2}$ est un multiple de $\vec{v_1}$. La famille $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}\}$ est donc linéairement dépendante. À *fortiori* la famille $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$ est aussi linéairement dépendante. Cette observation élimine les réponses 3 et 4.

Quelle que soit la valeur de h, les vecteurs $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ et $\vec{v_3}$ sont linéairement dépendants car il n'y a pas un pivot dans chacune des colonnes de la matrice associée.

Question 3 Soit $h \in \mathbb{R}$ et considérons les vecteurs

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -10 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v_3} = \begin{pmatrix} h+7 \\ 8 \\ 2h+1 \\ 25 \end{pmatrix}.$$

Alors le vecteur $\vec{v_3}$ s'écrit comme combinaison linéaire de $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ lorsque

- ☐ $h = -2$
- ☐ $h = 1$
- ☐ $h = 2$
- ■ $h = 4$

Solution: La bonne réponse est $h = 4$. On procède comme suit. On cherche la valeur de h pour laquelle il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha\vec{v_1} + \beta\vec{v_2} = \vec{v_3}$. Cela conduit au système dont la matrice augmentée est $\begin{pmatrix} 3 & 1 & h+7 \\ 2 & 2 & 8 \\ 4 & -10 & 2h+1 \\ 7 & 1 & 25 \end{pmatrix}$. On échelonne et on trouve:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & h+7 \\ 2 & 2 & 8 \\ 4 & -10 & 2h+1 \\ 7 & 1 & 25 \end{pmatrix} \overset{\frac{L_2}{2} \leftrightarrow L_1}{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & h+7 \\ 4 & -10 & 2h+1 \\ 7 & 1 & 25 \end{pmatrix} \underset{L_3 - 7L_1}{\overset{\substack{L_2 - 3L_1 \\ L_3 - 4L_1}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & h-5 \\ 0 & -14 & 2h-15 \\ 0 & -6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\overset{-\frac{L_4}{3}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & h-5 \\ 0 & -14 & 2h-15 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_3 + 7L_4}{\overset{L_2 + L_4}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & h-4 \\ 0 & 0 & 2h-8 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette dernière matrice admet exactement 2 pivots si seulement si les lignes 2 et 3 sont nulles, ce qui est le cas si et seulement si $h = 4$.

Question 4 Soit $b \in \mathbb{R}$. Alors les vecteurs

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$$

sont linéairement dépendants si

- ☐ $b = 2$
- ☐ $b = 3$
- ■ $b = 4$
- ☐ $b = 1$

Solution: La bonne réponse est $b = 4$. Pour le voir on échelonne la matrice formée par ces vecteurs:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & b \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_3 - L_1}{\overset{L_2 - L_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & b-1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \overset{L_2 + 3L_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & b-4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

De là on conclut que pour que les vecteurs soient linéairement dépendants il faut que $b = 4$ (afin d'avoir strictement moins que 3 pivots).

Question 5 Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

a) Si $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}\}$ est un ensemble linéairement indépendant de $\mathbb{R}^n$ et $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est une application linéaire, alors $\{T(\vec{v_1}), T(\vec{v_2})\}$ est un ensemble linéairement indépendant de $\mathbb{R}^m$.

b) Si $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}\}$ est un ensemble linéairement dépendant de $\mathbb{R}^n$ et $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est une application linéaire, alors $\{T(\vec{v_1}), T(\vec{v_2})\}$ est un ensemble linéairement dépendant de $\mathbb{R}^m$.

c) Soit $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une application linéaire. Si les vecteurs $\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_k}$ engendrent $\mathbb{R}^n$ et sont tels que $T(\vec{v_j}) = \vec{0}$ pour tout $j \in \{1, \ldots, k\}$, alors $T(\vec{v}) = \vec{0}$ pour tout $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$.

d) Si $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ et $T(\vec{0}) = \vec{0}$, alors T est une application linéaire.

e) Si $T(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = \lambda T(\vec{u}) + \mu T(\vec{v})$ pour tout $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est une application linéaire.

Solution:

a) Faux. Prenons par exemple $n = 2 = m$ et T l'application nulle $T(\vec{v}) = \vec{0}$ pour tout $v \in \mathbb{R}^2$. Alors l'ensemble $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ avec $\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un ensemble linéairement indépendant, mais $\{T(\vec{e_1}), T(\vec{e_2})\} = \{\vec{0}\}$ est dépendant.

b) Vrai. Soit $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}\}$ un ensemble linéairement dépendant de $\mathbb{R}^n$, il existe alors $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0,0)$ tels que $\lambda_1\vec{v_1} + \lambda_2\vec{v_2} = \vec{0}$.

Donc, si $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est une application linéaire, on a que $\vec{0} = T(\vec{0}) = T(\lambda_1\vec{v_1} + \lambda_2\vec{v_2}) = \lambda_1 T(\vec{v_1}) + \lambda_2 T(\vec{v_2})$. Ceci montre que $\{T(\vec{v_1}), T(\vec{v_2})\}$ est un ensemble linéairement dépendant de $\mathbb{R}^m$.

c) Vrai. Soit $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Comme les vecteurs $\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_k}$ engendrent $\mathbb{R}^n$, il existe (au moins) une combinaison linéaire $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ telle que $\lambda_1\vec{v_1} + \cdots + \lambda_k\vec{v_k} = \vec{v}$. On a donc que $T(\vec{v}) = T(\lambda_1\vec{v_1} + \cdots + \lambda_k\vec{v_k})$ et comme T est linéaire on a donc $T(\vec{v}) = \lambda_1 T(\vec{v_1}) + \cdots + \lambda_k T(\vec{v_k})$. De là on trouve que $T(\vec{v}) = \vec{0}$ car par hypothèse $T(\vec{v_j}) = \vec{0}$ pour tout $j \in \{1, \ldots, k\}$.

d) Faux. On peut prendre par exemple $n = 1 = m$ et $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $T(x) = x^2$. Cette application vérifie bien $T(0) = 0$ mais n'est pas linéaire.

e) Vrai. Si $T(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = \lambda T(\vec{u}) + \mu T(\vec{v})$ pour tout $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors en prenant les valeurs $\lambda = 1 = \mu$ on trouve que $T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$. Puis en prenant $\mu = 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on trouve $T(\lambda\vec{u}) = \lambda T(\vec{u})$. Ceci montre que T est linéaire.

Question 6 Trouver les matrices associées à chacune des transformations linéaires suivantes, définies par les images des vecteurs de la base canonique:

a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

c) $R\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est la rotation d'axe Oz et d'angle 60^o (dans le sens trigonométrique).

Solution:

a) La matrice (canoniquement) associée à T est donnée par $\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$

b) La matrice associée à T est donnée par $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Pour trouver la matrice associée à R, rotation d'axe Oz et d'angle 60^o (dans le sens trigonométrique), il suffit de calculer $R(\vec{e_i})$ pour $i = 1, 2, 3$. On trouve que $R\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, $R\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ et $R\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (car ce vecteur se trouve sur l'axe de rotation). On trouve donc la matrice $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Plus généralement, la rotation R_θ d'axe Oz et d'angle θ a pour matrice associée

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Question 7 L'application linéaire $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ donnée par

$$T(x, y, z) = (x + 2y + 3z\ ,\ 2x - 5y + 7z\ ,\ 3x - y - 2z\ ,\ y + 3z)$$

- ☐ est surjective mais pas injective
- ☐ n'est ni surjective ni injective
- ■ est injective mais pas surjective
- ☐ est bijective

Solution: L'application T est injective mais pas surjective. Pour le voir on passe par la matrice canoniquement associée à T qui est $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -5 & 7 \\ 3 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ que l'on échelonne:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -5 & 7 \\ 3 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \underset{L_3-3L_1}{\overset{L_2-2L_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -9 & 1 \\ 0 & -7 & -11 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \underset{L_3+7L_4}{\overset{L_2+9L_4}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 28 \\ 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \underset{\frac{L_3}{10}}{\overset{\frac{L_2}{28} \leftrightarrow L_4}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On voit qu'il y a 3 pivots pour 3 colonnes, donc T est injective. Par contre, il n'y a pas un pivot par ligne, donc T n'est pas surjective.

Question 8 Dire si les applications ci-dessous sont linéaires. Calculer la matrice associée canoniquement à chacune des applications qui sont linéaires et déterminer si les applications linéaires sont injectives, surjectives ou bijectives.

a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ donnée par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 \\ x_2 - x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donnée par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_2 \\ -3x_1 \end{pmatrix}$$

c) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donnée par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{x_1} \\ 5x_2 \end{pmatrix}$$

d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donnée par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

e) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donnée par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sin(x_1) \\ \cos(x_2) \end{pmatrix}$$

f) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ donnée par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_3 \\ x_1 - x_2 - x_3 \\ x_1 + x_3 + x_4 \end{pmatrix}$$

Solution:

a) T est linéaire. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. T est injective mais pas surjective.

b) T est linéaire. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$. T est bijective.

c) T est n'est pas linéaire (à cause du terme en $\sqrt{}$).

d) T est linéaire. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ T est bijective.

e) T n'est pas linéaire (car les fonctions trigonométriques ne sont pas linéaires).

f) T est linéaire. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. T n'est pas injective mais elle est surjective.

Question 9 Dans les cas suivants, écrire la matrice canonique correspondant à la transformation, et déterminer si la transformation est injective, surjective ou bijective.

a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 4x_1 + 3x_2 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto x_1 + x_2 + x_3$$

c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

d) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

e) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

f) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

Solution:

a) $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, injective (les colonnes sont linéairement indépendantes). Non surjective, car seulement deux vecteurs ne peuvent engendrer $\mathbb{R}^3$. Donc non bijective.

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, surjective (l'image est $\mathbb{R}$), non injective (plus de colonnes que de lignes). Donc non bijective.

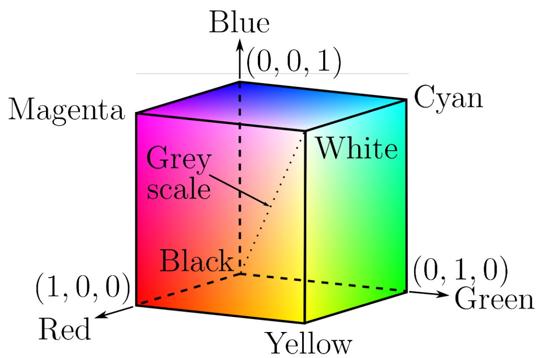
c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, injective, surjective et bijective (en permutant les lignes 1 et 3, on trouve la matrice identité).

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, rien (non injective car $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est envoyé sur zéro, et non surjective, car les vecteurs de l'image satisfont $x_1 = x_2$).

e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, injective, surjective et bijective.

f) T n'est pas une transformation linéaire, il est impossible de la représenter canoniquement par une matrice.

Question 10 Considérons $\mathbf{C} \subset \mathbb{R}^3$, le cube de couleurs RGB[a] comme ci-dessous, avec $R =$ Red, $G =$ Green et $B =$ Blue.



a) Écrire les couleurs $C =$ Cyan, $Y =$ Yellow et $M =$ Magenta comme combinaisons linéaires de R, G et B.

b) Soit $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la transformation linéaire qui transforme rouge en cyan, vert en magenta et bleu en jaune. Écrire la matrice canoniquement associée à T.

c) Soit $f : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ la fonction définie[b] par $f(r, g, b) = (1 - r, 1 - g, 1 - b)$.

   i) Est-ce que $T(R) = f(R)$? Et $T(G) = f(G)$? Et $T(B) = f(B)$?

   ii) Est-ce que les fonctions T et f sont égales?

[a] C'est l'ensemble $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$; chaque point est un triplet (r, g, b) où $0 \leq r, g, b \leq 1$.
[b] La fonction n'était bien définie dans la première version de la série.

Solution:

a) D'après le dessin on a $C =$ Green + Blue, puis $Y =$ Red + Green et $M =$ Magenta = Red + Blue. Donc $C = B + G$, $Y = R + G$ et $M = R + B$.

b) On a que $T(R) = C = G + B$, $T(G) = M = R + B$ et $T(B) = Y = R + G$.
Donc la matrice canoniquement associée à T est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

c) Soit $f : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ la fonction définie par $f(r, b, g) = (1 - r, 1 - b, 1 - g)$.

   i) Oui, on a bien $T(R) = C = (0, 1, 1) = f(1, 0, 0) = f(R)$,
   $T(G) = (1, 0, 1) = f(G)$ et $T(B) = (1, 1, 0) = f(B)$.

   ii) Non, les fonctions T et f ne sont pas égales car $T(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$ (car T est linéaire) mais $f(0, 0, 0) = (1, 1, 1)$ (f n'est pas linéaire!).