

Série 2

Mots-clés: Espaces \mathbb{R}^n , équations vectorielles, combinaisons linéaires, partie engendrée par des vecteurs, équations matricielles, espace des colonnes, multiplication matrice-vecteur, systèmes (in)homogènes.

Question 1 Soient les vecteurs $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -13 \\ -3 \end{pmatrix}$, et $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- i) Est-il possible d'écrire \vec{b} comme combinaison linéaire de \vec{a}_1 et \vec{a}_2 ?
- ii) Donner une interprétation géométrique du résultat.

Solution:

- i) Non. Considérons l'équation linéaire $x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 = \vec{b}$, d'inconnues x_1, x_2 . Le système linéaire correspondant est

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 = -3 \\ -2x_1 - 13x_2 = 8 \\ 3x_1 - 3x_2 = 1 \end{cases}$$

avec pour matrice augmentée

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & -3 \\ -2 & -13 & 8 \\ 3 & -3 & 1 \end{array} \right)$$

et pour forme échelonnée réduite

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Comme il y a un pivot dans la colonne correspondant au vecteur \vec{b} , on a que ce système ne possède pas de solution.

- ii) Cela signifie que le vecteur \vec{b} n'appartient pas au plan formé des vecteurs $x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2$, avec x_1 et x_2 réels.

Question 2

Prenons les vecteurs $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$, et $\vec{b} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$. Pour quelle(s) valeur(s) de α le vecteur \vec{b} est-il une combinaison linéaire de \vec{a}_1 et \vec{a}_2 ?

- $\alpha = -\frac{5}{2}$
- $\alpha = -\frac{3}{2}$ et $\alpha = -\frac{7}{2}$
- $\alpha = -\frac{7}{2}$
- $\alpha = -\frac{3}{2}$ et $\alpha = -\frac{5}{2}$

Solution: Considérons le système linéaire $x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 = \vec{b}$. En coordonnées, on obtient le système

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 = \alpha \\ x_2 = -5 \\ -2x_1 + 8x_2 = -3 \end{cases}$$

avec la matrice augmentée

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & \alpha \\ 0 & 1 & -5 \\ -2 & 8 & -3 \end{array} \right).$$

Après des opérations élémentaires sur les lignes, on obtient:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -15 + \alpha \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 7 + 2\alpha \end{array} \right).$$

On voit que le système est compatible si et seulement si $7 + 2\alpha = 0$, i.e. $\alpha = -\frac{7}{2}$. Dans ce cas, la matrice ci-dessus est la forme échelonnée réduite.

(Remarque: Lorsque $7 + 2\alpha \neq 0$, le système est incompatible, et la forme échelonnée réduite est $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$.) En résumé, le vecteur \vec{b} est une combinaison linéaire de \vec{a}_1 et \vec{a}_2 si et seulement si $\alpha = -\frac{7}{2}$.

Question 3

Considérons le système linéaire

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 4 \\ x_1 + 4x_2 - 8x_3 = 7 \\ -3x_1 - 7x_2 + 9x_3 = -6 \end{array} \right.$$

- i) Écrire le système sous forme matricielle $A\vec{x} = \vec{b}$.
- ii) Écrire le système comme combinaison linéaire des colonnes de la matrice A .
- iii) Trouver la solution de l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$.
- iv) Écrire l'ensemble des solutions en fonction d'un paramètre.

Solution:

$$\text{i) } \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 1 & 4 & -8 \\ -3 & -7 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\text{ii) } x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -5 \\ -8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\text{iii) La matrice augmentée est } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -5 & 4 \\ 1 & 4 & -8 & 7 \\ -3 & -7 & 9 & -6 \end{array} \right), \text{ et sa forme échelonnée réduite est } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \text{ La variable } x_3 \text{ est libre, on peut donc écrire l'ensemble des solutions comme}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = -5 - 4x_3 \\ x_2 = 3 + 3x_3 \\ x_3 \text{ libre} \end{array} \right.$$

- iv) En posant $x_3 = t \in \mathbb{R}$, on en déduit que les solutions (s_1, s_2, s_3) sont données par

$$s_3 = t, t \in \mathbb{R}, s_1 = -5 - 4t, s_2 = 3 + 3t.$$

On en déduit l'ensemble des solutions:

$$\left\{ \left(\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right) \right\}.$$

Question 4

- a) Soient les vecteurs $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ h \end{pmatrix}$.
- Pour quelle(s) valeur(s) de h le vecteur \vec{w} peut-il être obtenu comme combinaison linéaire de \vec{v}_1 et \vec{v}_2 ?
 - Dans ce cas quels sont les coefficients a_1, a_2 des vecteurs \vec{v}_1 et \vec{v}_2 ?
- b) Le vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$, se trouve-t-il dans le plan de \mathbb{R}^3 engendré par les colonnes de la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 1 \\ -2 & -8 \end{pmatrix}$. Justifiez votre réponse.

Solution:

- a) Tout élément de l'espace engendré par \vec{v}_1, \vec{v}_2 est de la forme

$$a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 = a_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

où a_1 et a_2 sont des réels. Le vecteur $\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ h \end{pmatrix}$ est engendré par \vec{v}_1, \vec{v}_2 si et seulement il existe des réels, a_1 et a_2 tels que l'équation vectorielle suivante soit satisfaite:

$$a_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ h \end{pmatrix}$$

Sous forme matricielle on effectue des opérations en essayant de ne pas traîner des fractions:

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 10 \\ 2 & 3 & h \end{array} \right) \sim_{L_1 \leftrightarrow \frac{L_2}{2}} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & h \end{array} \right) \sim_{L_2 - 2L_1} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -7 \\ 2 & 3 & h-5 \end{array} \right) \sim_{L_3 - 2L_2} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & h+9 \end{array} \right) \sim_{\frac{L_1 - L_2}{2}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & h+9 \end{array} \right) \end{array}$$

D'où $h = -9$ pour que le système soit compatible et $a_1 = 6, a_2 = -7$.

- b) Pour voir si le vecteur \vec{v} est dans le plan engendré par les colonnes de A , on construit une nouvelle matrice $B = (A | \vec{v})$, alors la forme échelonnée réduite de B montre que $\vec{v} = -5 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix}$ et donc \vec{v} est bien dans ce plan.

Question 5 Soit $V = \text{Vect}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ avec

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Laquelle des informations suivantes est correcte?

V contient une infinité de vecteurs de \mathbb{R}^4 .

Le vecteur $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ appartient à V .

V ne contient aucun vecteur de \mathbb{R}^4 .

V contient tous les vecteurs de \mathbb{R}^4 .

Solution: Comme la troisième composante des quatre vecteurs est nulle, tous

les vecteurs de la forme $\begin{pmatrix} * \\ * \\ a \\ * \end{pmatrix}$ avec $a \neq 0$, ne seront pas dans V . Donc V ne

peut pas contenir le vecteur \vec{b} ainsi que tous les vecteurs de \mathbb{R}^4 . Comme \vec{v}_1 (ou \vec{v}_2, \dots) est dans V , il contient un vecteur de \mathbb{R}^4 . Vu qu'il contient au moins un vecteur de \mathbb{R}^4 , il contient toutes les combinaisons linéaires de celui-ci, et donc une infinité de vecteurs de \mathbb{R}^4 .

Question 6

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

- 1) Le système d'équations linéaires homogène représenté par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

est compatible.

Vrai Faux

- 2) Le système d'équations linéaires inhomogène représenté par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

est compatible.

Faux Vrai

- 3) Si la matrice des coefficients d'un système de quatre équations à quatre inconnues a un pivot dans chaque colonne, alors le système est compatible.

Vrai Faux

- 4) Si la matrice augmentée d'un système de quatre équations à quatre inconnues a un pivot dans chaque ligne, alors le système est compatible.

Faux Vrai

- 5) Si \vec{x} est une solution non nulle de $A\vec{x} = \vec{0}$, alors aucune composante de \vec{x} est nulle.

Faux Vrai

- 6) Si A est une matrice $m \times n$ et $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ sont tels que $A\vec{v} = \vec{0} = A\vec{w}$, alors $A(\lambda\vec{v} + \mu\vec{w}) = \vec{0}$ pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Faux Vrai

Solution:

- 1) Vrai. Un système d'équations linéaires homogène est toujours compatible! La matrice a beau avoir un pivot dans la dernière colonne, il ne s'agit pas ici d'un pivot dans la colonne des termes inhomogènes. Ceux-ci sont tous nuls et on ne les écrit pas.

- 2) Faux. La ligne $(0 \ 0 \ 0 \ 7)$ montre que le système d'équations linéaires inhomogène est incompatible.
- 3) C'est vrai. Un pivot dans chacune des quatre colonnes implique l'existence d'un pivot dans chaque ligne. On conclut alors par un résultat du cours (Théorème 4).
- 4) C'est faux. Si par exemple le pivot de la 4ème ligne se trouve dans la 5ème colonne, alors la dernière ligne d'une forme échelonnée de la matrice augmentée est $(0 \ 0 \ 0 \ 0 \ a)$ avec $a \neq 0$ et donc le système est incompatible dans ce cas.
- 5) Faux. Prenons par exemple la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Alors \vec{x} est une solution non triviale de $A\vec{x} = \vec{0}$, mais \vec{x} a une composante nulle.
- 6) Vrai. En effet, si $A\vec{v} = \vec{0} = A\vec{w}$, alors, par les propriétés vues en cours, on a $A(\lambda\vec{v} + \mu\vec{w}) = A(\lambda\vec{v}) + A(\mu\vec{w}) = \lambda A\vec{v} + \mu A\vec{w} = \lambda\vec{0} + \mu\vec{0} = \vec{0}$ pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Question 7 Soit $V = \text{Vect}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ avec

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Laquelle des informations suivantes est correcte?

- V contient tous les vecteurs de \mathbb{R}^4 .
- V contient seulement v_1, v_2, v_3, v_4 .
- Le vecteur $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ n'appartient pas à V .
- Le vecteur nul n'appartient pas à V .

Solution: La matrice dont les colonnes sont les v_i est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Elle

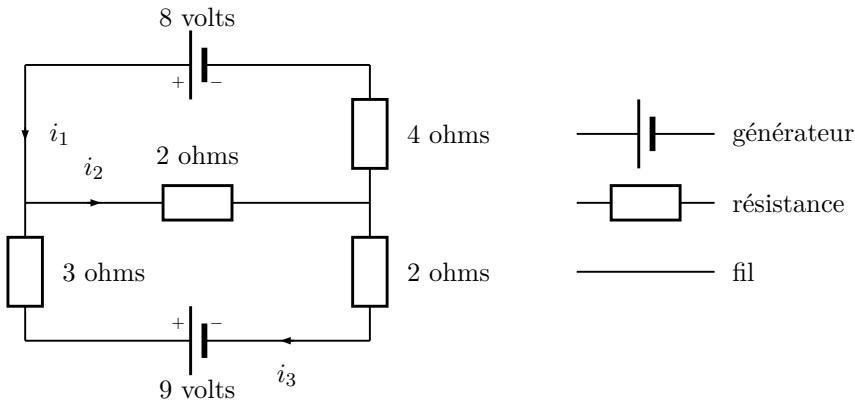
est déjà échelonnée (mais pas réduite) et on observe 1 pivot par variable. Donc le système $A\vec{x} = \vec{b}$ possède toujours une solution (unique ici) et donc $V = \mathbb{R}^4$.

Question 8 Les deux lois de Kirchhoff

- À chaque nœud (embranchement) d'un circuit électrique, la somme des courants (intensités) qui entrent dans le nœud est égale à la somme des courants qui en sortent.
- La somme des tensions (différences de potentiels) le long de tout circuit fermé est nulle (l'augmentation du potentiel est comptée avec + et la diminution avec -).

On rappelle que la chute de potentiel U dans une résistance R traversée par un courant d'intensité I est donnée par la loi d'Ohm $U = RI$.

Déterminer les intensités i_1, i_2, i_3 dans le circuit suivant.



Solution: Appliquons la 1ère loi de Kirchhoff au nœud situé au dessus de la résistance de 3 ohms.

$$i_1 + i_3 = i_2.$$

Appliquons la seconde loi de Kirchhoff à la boucle du haut (sens anti-horaire, en partant du générateur) :

$$8 - 2i_2 - 4i_1 = 0.$$

De même avec la boucle du bas (maintenant dans le sens horaire) :

$$9 - 3i_3 - 2i_2 - 2i_3 = 0.$$

La matrice augmentée du système et sa forme échelonnée réduite sont :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 & -8 \\ 0 & -2 & -5 & -9 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

d'où la solution: $i_1 = 1$, $i_2 = 2$, $i_3 = 1$.