Durée : 180 minutes

Algèbre linéaire
Examen
Partie commune
Automne 2020

Réponses

Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :

$+3$ points si la réponse est correcte,

0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs croix,

-1 point si la réponse est incorrecte.

Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :

$+1$ points si la réponse est correcte,

0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs croix,

-1 point si la réponse est incorrecte.

Les notations et la terminologie de cet énoncé sont celles utilisées dans les séries d'exercices et le cours d'Algèbre linéaire du semestre d'Automne 2020.

Notation

– Pour une matrice A, a_{ij} désigne l'élément situé sur la ligne i et la colonne j de la matrice.
– Pour un vecteur $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, x_i désigne la i-ème composante de $\vec{x}$.
– I_m désigne la matrice identité de taille $m \times m$.
– $\mathbb{P}_n$ désigne l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n.
– $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices de taille $m \times n$.
– Pour $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, le produit scalaire usuel est défini par $\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$.

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 : Soit A une matrice symétrique telle que

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sont des vecteurs propres de A associés, respectivement, aux valeurs propres 1, 0 et 2. Alors

☐ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ ☐ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

■ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ☐ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Question 2 : Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Alors la dimension de l'espace propre de A associé à la valeur propre $\lambda = 1$ est égale à

☐ 0 ■ 1 ☐ 2 ☐ 3

Question 3 : L'inverse $B = A^{-1}$ de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

est tel que

☐ $b_{32} = -2/3$ ■ $b_{23} = -2/3$ ☐ $b_{31} = -2/3$ ☐ $b_{13} = -2/3$

Question 4 : Le polynôme caractéristique de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

est

- ☐ $-\lambda^3 + 5\lambda^2 - 4\lambda + 3$
- ☐ $\lambda^3 + 5\lambda^2 + 5\lambda - 3$
- ■ $-\lambda^3 + 5\lambda^2 - 5\lambda - 3$
- ☐ $-\lambda^3 + 7\lambda^2 - \lambda$

Question 5 : Si on calcule la décomposition LU de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(en utilisant **seulement** les opérations élémentaires sur les lignes consistant à ajouter un multiple d'une ligne à une autre ligne **en dessous**), alors la matrice L obtenue est telle que

☐ $\ell_{42} = 1$ ■ $\ell_{42} = 2$ ☐ $\ell_{42} = 1/3$ ☐ $\ell_{42} = -1/3$

Question 6 : Soient α un paramètre réel et A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -4 \\ 3 & 4 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Pour quelle valeur de α est-ce qu'on a $\text{rang}(A) < 3$?

☐ $\alpha = 3$ ☐ $\alpha = -3$ ☐ $\alpha = 0$ ■ $\alpha = -7$

Question 7 : On considère $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel. Soit $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{R}^3$ définie par les vecteurs

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Alors une base orthogonale, obtenue en appliquant l'algorithme de Gram-Schmidt à $\mathcal{B}$ sans changer l'ordre, est donnée par les vecteurs

☐ $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

■ $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$

Question 8 : On reprend les données de la question précédente. La projection orthogonale du vecteur

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sur le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ est le vecteur

- ☐ $\begin{pmatrix} 7/3 \\ -7/6 \\ 7/6 \end{pmatrix}$
- ■ $\begin{pmatrix} 5/3 \\ 19/6 \\ -1/6 \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}$

Question 9 : Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \widehat{x} = \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix}.$$

Si $\widehat{x}$ est une solution au sens des moindres carrés du système $A\vec{x} = \vec{b}$, alors

- ■ $\hat{x}_2 = 8/7$
- ☐ $\hat{x}_2 = -2/7$
- ☐ $\hat{x}_2 = 3$
- ☐ $\hat{x}_2 = 6/7$

Question 10 : Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Une solution $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ du système $A\vec{x} = \vec{b}$ a pour deuxième composante

- ☐ $x_2 = -3$
- ☐ $x_2 = 10$
- ■ $x_2 = 6$
- ☐ $x_2 = 1$

Question 11 : On se donne les bases ordonnées de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{P}_2$ suivantes

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{D} = \left(1, t + t^2, t - t^2\right).$$

Soit $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{P}_2$ l'application linéaire définie par $T(\vec{x}) = x_1\, t + x_2\, t^2$ pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$. Alors la matrice associée à T par rapport aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{D}$ est

- ☐ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- ■ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1/2 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

Question 12 :
Le produit $C = AB$ des matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 8 \\ 1 & 0 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & -3 & -2 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 7 & -2 & 7 \\ 3 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -5 & 9 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

est tel que

- ☐ $c_{53} = 10$
- ☐ $c_{53} = -8$
- ☐ $c_{53} = 18$
- ■ $c_{53} = 38$

Question 13 : La droite qui approxime le mieux au sens des moindres carrés les points $(1,2), (-1,5), (0,3)$ est

- ■ $y = \dfrac{10}{3} - \dfrac{3}{2}x$
- ☐ $y = \dfrac{3}{2} + \dfrac{10}{3}x$
- ☐ $y = -\dfrac{10}{3} - \dfrac{3}{2}x$
- ☐ $y = \dfrac{10}{3} - \dfrac{14}{9}x$

Question 14 : Soit $\mathcal{B}$ la base ordonnée de $\mathbb{P}_2$ donnée par $\mathcal{B} = \big(-1+t, 2t-t^2, 2-t+3t^2\big)$ et soit $p \in \mathbb{P}_2$ défini par $p(t) = t - 8t^2$. La troisième composante de p par rapport à la base $\mathcal{B}$ est

- ■ $-15/7$
- ☐ $11/7$
- ☐ 15
- ☐ $-11/7$

Question 15 : Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors

- ■ $\det(A) = -8$
- ☐ $\det(A) = -3$
- ☐ $\det(A) = 7$
- ☐ $\det(A) = 0$

Question 16 : Soient les vecteurs de $\mathbb{R}^4$

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} h \\ 2 \\ 2h \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Pour quelle valeur de $h \in \mathbb{R}$ le vecteur $\vec{b}$ est-il dans $\text{Vect}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$?

- ☐ $h = 1/8$
- ☐ $h = -2$
- ☐ $h = 1$
- ■ $h = 1/4$

Question 17 : Soient $\mathcal{B} = \left(1+3t, 2+t^2, 4+t+3t^2\right)$ et $\mathcal{C} = \left(1, t, t^2\right)$ deux bases ordonnées de $\mathbb{P}_2$. Si la matrice P représente la matrice de changement de base telle que $[q]_{\mathcal{C}} = P[q]_{\mathcal{B}}$ pour tout $q \in \mathbb{P}_2$, alors

☐ $p_{12} = 4$ ☐ $p_{12} = 3$ ☐ $p_{12} = 0$ ■ $p_{12} = 2$

Question 18 : Soit R la forme échelonnée réduite de la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Alors, on a

☐ $r_{24} = -11/12$ ■ $r_{24} = 19/12$ ☐ $r_{24} = -19/12$ ☐ $r_{24} = 17/12$

Question 19 : La matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

■ est inversible et son inverse est diagonalisable à l'aide d'une matrice de changement de base orthogonale

☐ est inversible et son inverse n'est pas diagonalisable à l'aide d'une matrice de changement de base orthogonale

☐ n'est pas diagonalisable à l'aide d'une matrice de changement de base orthogonale

☐ n'est pas inversible

Question 20 : Soient k et ℓ des paramètres réels et

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 5 & 2 & 1 \\ 0 & \ell & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors $\lambda = 6$ est une valeur propre de A lorsque

■ $5k + \ell = 20$

☐ $5k + \ell = 2$

☐ $k + \ell = 4$

☐ $5k + \ell = 56$

Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire, si elle est parfois fausse).

Question 21 : Si chaque ligne d'une matrice A est orthogonale à tous les vecteurs de $\mathrm{Ker}(A)$, alors la matrice A est symétrique.

□ VRAI ■ FAUX

Question 22 : L'ensemble

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \text{ tel que } a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des matrices de taille 2×2 à coefficients réels.

■ VRAI □ FAUX

Question 23 : Soient

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Alors le vecteur $\vec{v}$ est dans l'image de l'application linéaire $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ définie par $T(\vec{x}) = A\vec{x}$.

■ VRAI □ FAUX

Question 24 : Soit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Le vecteur $\begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ -1 \end{pmatrix}$ est dans $\mathrm{Ker}(A)$.

□ VRAI ■ FAUX

Question 25 : Soit A la matrice de la question précédente. Le vecteur $\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ est dans $\mathrm{Col}(A)$, le sous-espace vectoriel engendré par les colonnes de A.

■ VRAI □ FAUX

Question 26 : Le système linéaire

$$\begin{cases} 2x - 4z + 2t = -10 \\ y + z = 2 \\ 3x + 5y + 8z - t = -6 \\ 2x + y - 3z + 2t = 1 \end{cases}$$

possède au moins une solution.

☐ VRAI ■ FAUX

Question 27 : Si une matrice A est inversible, alors $A^T A$ est aussi inversible.

■ VRAI ☐ FAUX

Question 28 : Soit A une matrice de taille 3×3 dont les valeurs propres sont -1, 1 et 2. Alors le déterminant de $A^T A$ est égal à 2.

☐ VRAI ■ FAUX

Question 29 : Si, comme dans la question précédente, A est une matrice de taille 3×3 dont les valeurs propres sont -1, 1 et 2, alors la matrice A est inversible et le déterminant de A^{-1} est égal à $-1/2$.

■ VRAI ☐ FAUX

Question 30 : Soit A une matrice symétrique de taille $n\times n$. On suppose que $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathbb{R}^n$ sont des vecteurs propres de A dont les valeurs propres associées sont respectivement α, α et β, où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $\alpha \neq \beta$. Alors pour tout $\vec{w} \in \mathrm{Vect}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ on a $\vec{w} \cdot \vec{v}_3 = 0$.

■ VRAI ☐ FAUX

Question 31 : Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ trois vecteurs non-nuls. Si $\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{v}$ et $\vec{v}$ est orthogonal à $\vec{w}$, alors $\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{w}$.

☐ VRAI ■ FAUX

Question 32 : Soit A une matrice de taille 8×5 telle que $\dim\bigl(\mathrm{Ker}(A)\bigr) = 2$. Alors la dimension du sous-espace vectoriel engendré par les lignes de A est égale à 3.

■ VRAI ☐ FAUX

Question 33 : Soit A une matrice de taille $m\times(m+1)$ et telle que $\mathrm{Col}(A) = \mathbb{R}^m$. Soient $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^{m+1}$ tels que $\vec{x} \neq \vec{y}$ et $A\vec{x} = A\vec{y}$ et soit $\vec{z} = \vec{x} - \vec{y}$. Alors $\{\vec{z}\}$ est une base de $\mathrm{Ker}(A)$.

■ VRAI ☐ FAUX

Question 34 : Les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

sont linéairement indépendants.

■ VRAI ☐ FAUX

Question 35 : Soient A une matrice de taille $m\times n$ et B une matrice de taille $n\times m$ telles que BA soit inversible. Alors le rang de A est égal à n.

■ VRAI ☐ FAUX

Question 36 : Sachant que

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 47/11 \\ 0 & 1 & 0 & -49/22 \\ 0 & 0 & 1 & 3/11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est la forme échelonnée réduite de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix},$$

alors une base du sous-espace vectoriel engendré par les lignes de A est donnée par les vecteurs

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 47/11 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -49/22 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3/11 \end{pmatrix}.$$

■ VRAI ☐ FAUX

Question 37 : La matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -12 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable.

■ VRAI ☐ FAUX

Question 38 : Soit S un sous-ensemble de l'espace vectoriel V. Si $\dim V = n$ et si S engendre V, alors S est une base de V.

☐ VRAI ■ FAUX

Question 39 : Soient V un espace vectoriel de dimension 2, W un espace vectoriel de dimension 5 et $T\colon V \to W$ une application linéaire injective. Alors la dimension de $\mathrm{Im}(T)$ est égale à 2.

■ VRAI ☐ FAUX

Question 40 : Si A est une matrice de taille 6×4, alors la dimension de $\mathrm{Ker}(A)$ est plus grande ou égale à 2.

☐ VRAI ■ FAUX