

Durée : 144 minutes



# Algèbre linéaire

## Examen

### Partie commune

### Automne 2019

---

#### Enoncé

---

Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :

- +3 points si la réponse est correcte,
- 0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs croix,
- 1 point si la réponse est incorrecte.

---

Les notations et la terminologie de cet énoncé sont celles utilisées dans les séries d'exercices et le cours d'Algèbre linéaire du semestre d'Automne 2019.

---

## Notation

- Pour une matrice  $A$ ,  $a_{ij}$  désigne l'élément situé sur la ligne  $i$  et la colonne  $j$  de la matrice.
- Pour un vecteur  $\vec{x}$ ,  $x_i$  désigne la  $i$ -ème coordonnée de  $\vec{x}$ .
- $I_m$  désigne la matrice identité de taille  $m \times m$ .
- $\mathbb{P}_n$  désigne l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à  $n$ .
- $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$  désigne l'espace vectoriel des matrices de taille  $m \times n$
- Pour  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ , le produit scalaire usuel est défini par  $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{x}^T \vec{y}$ .

## Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

**Question 1 :** Soit  $a$  un paramètre réel et soient

$$p_1(t) = a + 4t - 5t^2, \quad p_2(t) = 4 + at - 5t^2, \quad p_3(t) = 4 - 5t + at^2.$$

Alors les polynômes  $p_1$ ,  $p_2$  et  $p_3$  sont linéairement dépendants si et seulement si

$a \notin \{-5, 1, 4\}$

$a \in \{-5, -1, 4\}$

$a \in \{-5, 1, 4\}$

$a \notin \{-5, -1, 4\}$

**Question 2 :** Soit  $A$  la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Alors une base de  $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid A\vec{x} = 5\vec{x}\}$  est donnée par

$\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

$\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$

$\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

$\left( \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

**Question 3 :** Soit  $A$  une matrice de taille  $n \times n$  diagonalisable.

Si toutes les valeurs propres de  $A$  sont non nulles, alors il est toujours vrai que

$A^T$  et  $A^{-1}$  ne sont pas forcément diagonalisables

$A^T$  et  $A^{-1}$  sont diagonalisables

$A^T$  est diagonalisable, mais  $A^{-1}$  n'est pas forcément diagonalisable

$A^{-1}$  est diagonalisable, mais  $A^T$  n'est pas forcément diagonalisable

**Question 4 :** Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & -5 & 15 & 18 \\ 0 & 2 & -6 & -6 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de  $A$  sont

- |                                       |  |
|---------------------------------------|--|
| <input type="checkbox"/> 3, 5, 0 et 2 | <input type="checkbox"/> -1, 15, -6 et 2 |
| <input type="checkbox"/> 2, 6, 0      | <input type="checkbox"/> -2, 2 et 0      |

**Question 5 :** Soit  $A$  une matrice de taille  $n \times n$ .

Si  $A$  est orthogonale, laquelle des affirmations suivantes **n'est pas** forcément vraie?

- |   |
|---|
| <input type="checkbox"/> Pour $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ , $A\vec{v}$ est orthogonal à $A\vec{w}$ si et seulement si $\vec{v}$ est orthogonal à $\vec{w}$  |
| <input type="checkbox"/> $\vec{a}_i \cdot \vec{a}_j = \vec{b}_i \cdot \vec{b}_j$ pour tout $1 \leq i, j \leq n$ , où $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ sont les colonnes de $A$ et $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$ sont les colonnes de $A^T$ |
| <input type="checkbox"/> $\det A = 1$   |
| <input type="checkbox"/> $A^T$ est orthogonale  |

**Question 6 :** Soit  $T : \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  l'application linéaire définie par

$$T \left( \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a - d & b + c \\ c - b & a + d \end{pmatrix}.$$

La matrice  $M$  de  $T$  relativement à la base  $\mathcal{B} = \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ , telle que  $[T(A)]_{\mathcal{B}} = M[A]_{\mathcal{B}}$  pour tout  $A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ , est

- |   |   |
|---|---|
| <input type="checkbox"/> $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ | <input type="checkbox"/> $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ |
| <input type="checkbox"/> $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ | <input type="checkbox"/> $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ |

**Question 7 :** Soient  $\alpha$  un nombre réel et

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \alpha & 1 \\ -1 & 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

La matrice  $A$  est inversible si et seulement si

- |   |  |
|---|--|
| <input type="checkbox"/> $\alpha \in \{3, -1\}$ | <input type="checkbox"/> $\alpha \notin \{-3, 1\}$ |
| <input type="checkbox"/> $\alpha \in \{-3, 1\}$ | <input type="checkbox"/> $\alpha \notin \{3, -1\}$ |

**Question 8 :** Soit  $A$  une matrice de taille  $m \times n$  avec  $m < n$ . Alors il est toujours vrai que

- $A\vec{x} = A\vec{c}$  possède une infinité de solutions pour tout choix de  $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$
- $A\vec{x} = A\vec{c}$  possède une unique solution pour tout choix de  $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$
- $A\vec{x} = \vec{b}$  possède au moins une solution pour tout choix de  $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$
- $A^T\vec{y} = \vec{0}$  possède une solution unique

**Question 9 :** Soit  $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'application linéaire définie par

$$\begin{aligned} T(\vec{e}_1) &= 6\vec{e}_1 + 12\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3, & T(\vec{e}_2) &= 2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - \vec{e}_3, \\ T(\vec{e}_3) &= 8\vec{e}_1 + 12\vec{e}_2 - 8\vec{e}_3, & T(\vec{e}_4) &= 8\vec{e}_1 + 10\vec{e}_2 - 10\vec{e}_3, \end{aligned}$$

où  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$  et  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  sont les bases canoniques de  $\mathbb{R}^4$  et  $\mathbb{R}^3$  respectivement. Alors

- $\text{Im } T = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$
- $\text{Im } T = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$
- $\text{Im } T = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$
- $\text{Im } T = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$

**Question 10 :** La matrice symétrique  $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$  est diagonalisable en base orthonormée et peut s'écrire sous la forme  $A = QDQ^T$ , avec  $Q$  une matrice orthogonale et  $D$  une matrice diagonale.

Si  $d_{11} > 0$ , alors un choix possible pour  $Q$  est

- $Q = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$
- $Q = \begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 \\ 2/5 & 1/5 \end{pmatrix}$
- $Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$
- $Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$

**Question 11 :** Soit  $A$  une matrice de taille  $m \times n$  et soit  $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ .

Soit  $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$  une solution du système linéaire  $(A^T A)\vec{x} = A^T \vec{b}$ . Alors il est toujours vrai que

- $\vec{w}$  est une solution du système linéaire  $A\vec{x} = \vec{b}$
- la matrice  $A^T A$  est inversible
- $\|\vec{b} - A\vec{w}\| \geq \|\vec{b} - A\vec{u}\|$  pour tout  $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$
- $\|\vec{b} - A\vec{w}\| \leq \|\vec{b} - A\vec{u}\|$  pour tout  $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$

**Question 12 :** Parmi les quatre sous-ensembles de  $\mathbb{P}_2$  suivants :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &= \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathbb{P}_2 \mid a_1 = 0\}, \\ \mathcal{E}_2 &= \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathbb{P}_2 \mid a_2 = a_0 + a_1\}, \\ \mathcal{E}_3 &= \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathbb{P}_2 \mid a_1 = a_2 + 3\}, \\ \mathcal{E}_4 &= \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathbb{P}_2 \mid a_0^2 = a_1^2\}, \end{aligned}$$

combien sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{P}_2$ ?

- 1
- 2
- 3
- 4

**Question 13 :** Soit  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  l'application linéaire définie par

$$T \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 8x_1 + x_2 \end{pmatrix}.$$

Si  $M = \begin{pmatrix} -5 & 10 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$  est la matrice de  $T$  relativement à la base  $\mathcal{B} = \left( \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \right)$ , telle que  $[T(\vec{v})]_{\mathcal{B}} = M[\vec{v}]_{\mathcal{B}}$  pour tout  $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ , alors

- $b_1 = 2, \quad b_2 = 1$   
  $b_1 = 1, \quad b_2 = -2$

- $b_1 = 1, \quad b_2 = 2$   
  $b_1 = -2, \quad b_2 = 1$

**Question 14 :** Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Les coefficients de sa matrice inverse  $C = A^{-1}$  satisfont

- $c_{11} = -1 \quad \text{et} \quad c_{32} = -1$   
  $c_{21} = -1 \quad \text{et} \quad c_{13} = 0$

- $c_{22} = -1 \quad \text{et} \quad c_{13} = -1$   
  $c_{12} = -1 \quad \text{et} \quad c_{33} = 0$

**Question 15 :** Soit  $A$  une matrice de taille  $m \times n$ . Soit  $W$  le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^m$  défini par

$$W = \{ \vec{w} \in \mathbb{R}^m \mid \text{il existe } \vec{v} \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } A\vec{v} = \vec{w} \}.$$

Si  $\dim(W) = k$ , alors

- $\dim(\text{Ker } A^T) = n - k$   
  $\dim(\text{Ker } A^T) = k$

- $\dim(\text{Ker } A^T) = \min(m, n) - k$   
  $\dim(\text{Ker } A^T) = m - k$

**Question 16 :** Soit  $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  l'application linéaire définie par

$$T \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 \\ 2x_1 + x_2 - x_4 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 \\ x_2 - 2x_3 + 3x_4 \end{pmatrix}.$$

Alors

- $\text{Ker } T = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$   
  $\text{Ker } T = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

- $\text{Ker } T = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$   
  $\text{Ker } T = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$

**Question 17 :** Soient  $h$  un paramètre réel,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ -1 & 12 & 5 \\ -1 & 4h+4 & h+3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ h-3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Alors l'équation matricielle  $A\vec{x} = \vec{b}$

- admet une infinité de solutions si et seulement si  $h \in \{4, 1\}$
- admet une infinité de solutions si et seulement si  $h \in \{-4, 1\}$
- admet une infinité de solutions si et seulement si  $h \in \{-4, -1\}$
- admet une infinité de solutions si et seulement si  $h \in \{4, -1\}$

**Question 18 :** Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Alors la solution au sens des moindres carrés  $\hat{x} = \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix}$  de l'équation  $A\vec{x} = \vec{b}$  satisfait

- |  |                    |   |                     |
|--|--------------------|---|---------------------|
| <input type="checkbox"/> $\hat{x}_1 = 10/7$ ,  | $\hat{x}_2 = 12/7$ | <input type="checkbox"/> $\hat{x}_1 = 12/7$ , | $\hat{x}_2 = 10/7$  |
| <input type="checkbox"/> $\hat{x}_1 = -10/7$ , | $\hat{x}_2 = 12/7$ | <input type="checkbox"/> $\hat{x}_1 = 12/7$ , | $\hat{x}_2 = -10/7$ |

**Question 19 :** Soit  $A$  une matrice de taille  $n \times n$  et soit

$$k = \det((A + I_n)^2 - (A - I_n)^2).$$

Alors

- |  |  |
|--|--|
| <input type="checkbox"/> $k = 4 \det(A)$   | <input type="checkbox"/> $k = 2 \det(A)$   |
| <input type="checkbox"/> $k = 2^n \det(A)$ | <input type="checkbox"/> $k = 4^n \det(A)$ |

**Question 20 :** Soient

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 0 \\ -18 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad W = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Si  $\mathbb{R}^4$  est muni du produit scalaire usuel, alors la projection orthogonale de  $\vec{v}$  sur  $W$  est

- |   |  |
|---|--|
| <input type="checkbox"/> $\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 0 \\ -14 \end{pmatrix}$ | <input type="checkbox"/> $\begin{pmatrix} -12 \\ 12 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}$       |
| <input type="checkbox"/> $\begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ | <input type="checkbox"/> $\begin{pmatrix} -360 \\ 360 \\ -432 \\ -180 \end{pmatrix}$ |

**Question 21 :** Soient

$$\mathcal{B} = \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad \text{et} \quad \mathcal{C} = \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

deux bases de  $\mathbb{R}^3$ . Alors la matrice de passage  $P$  de la base  $\mathcal{B}$  vers la base  $\mathcal{C}$ , telle que  $[\vec{x}]_{\mathcal{C}} = P[\vec{x}]_{\mathcal{B}}$  pour tout  $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ , est

$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

**Question 22 :** Soient  $A$  et  $B$  deux matrices carrées de taille  $n \times n$  et soit  $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$  une base de  $\mathbb{R}^n$  formée de vecteurs propres de  $A$ .

Si  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$  sont aussi des vecteurs propres de la matrice  $AB$ , alors il est toujours vrai que

- si  $B$  est inversible, alors  $B$  est diagonalisable
- si  $A$  est inversible, alors  $AB \neq BA$
- si  $A$  est inversible, alors  $B$  est diagonalisable
- le déterminant de  $B$  est non-nul