Série 8

Mots-clés: espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels, applications linéaires entre espaces vectoriels

Rappel. Soit V un espace vectoriel muni d'une addition $+$ et multiplication scalaire $\cdot$. Un sous-ensemble $W \subset V$ est un **sous-espace vectoriel de V** si W satisfait les trois propriétés suivantes :

(1) $W \neq \varnothing$

(2) $\vec{v} + \vec{w} \in W, \quad \forall \vec{v}, \vec{w} \in W$

(3) $\lambda \cdot \vec{v} \in W, \quad \forall \vec{v} \in W$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

Question 1 Soit V un espace vectoriel muni d'une addition $+$ et multiplication scalaire $\cdot$. Démontrer qu'un sous-ensemble $W \subset V$ est un sous-espace vectoriel si et seulement si W satisfait la “caractérisation simplifiée” :

(1') $0_V \in W$

(2') $\lambda \cdot \vec{v} + \vec{w} \in W, \quad \forall \vec{v}, \vec{w} \in W$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Question 2 Lesquels des ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$?

a) Un cube plein dans $\mathbb{R}^3$, centré à l'origine.

b) La diagonale $\Delta = \{(x, x, \cdots, x) \in \mathbb{R}^n\}$.

c) Un sous-ensemble qui possède 2143 éléments.

d) La réunion de tous les axes de coordonnées.

e) L'ensemble des points à coordonnées entières.

Question 3 Soit $V = \mathbb{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Lesquels des ensembles suivants sont des sous-espaces de V?

a) $V_1 = \{f \in V \mid f(0) = f(1)\}$.

b) $V_2 = \{f \in V \mid f(x) \geq 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}\}$.

c) $V_3 = \{f \in V \mid f \text{ est bijective}\}$.

Question 4 Soit $\mathbb{P}_n$, l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. Lesquels des sous-ensembles suivants de $\mathbb{P}_n$ sont des sous-espaces vectoriels?

a) L'ensemble $V_1 = \{p \in \mathbb{P}_n \mid p(1) = 0\}$.

b) L'ensemble V_2 de tous les polynômes de degré exactement n.

c) L'ensemble $V_3 = \{p \in \mathbb{P}_n \mid p(0) = 0\}$.

Question 5 Soit $M_{n\times n}(\mathbb{R})$, l'espace vectoriel des matrices $n \times n$ à coefficients réels. Lesquels des ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $M_{n\times n}(\mathbb{R})$?

a) L'ensemble des matrices triangulaires supérieures dans $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, i.e. des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

b) L'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

c) L'ensemble des matrices de trace nulle.
Note : la ***trace*** *d'une matrice carrée est la somme des coefficients sur sa diagonale.*

d) L'ensemble des matrices de déterminant nul.

e) L'ensemble des matrices A telles que $A^4 = -I_n$.

Question 6 Soit V un espace vectoriel et $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3} \in V$. Décrire explicitement le sous-espace $\mathrm{Span}(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3})$ engendré par $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$ dans les cas suivants:

a) $V = \mathbb{R}^3$, $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) $V = \mathbb{P}_3$, $\vec{v_1} = t$, $\vec{v_2} = t^2$, $\vec{v_3} = t^3$.

Question 7 On travaille dans $V = \mathbb{P}_3$.
Soient $p_1(t) = 1 - t$, $p_2(t) = t^3$, $p_3(t) = t^2 - t + 1$.
Est-ce que le polyôme $q(t) = t^3 - 2t + 1$ appartient à $\mathrm{Vect}(p_1, p_2, p_3)$?

Question 8 Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier $n \geq 1$. Pour chacune des applications suivantes, déterminer et justifier si c'est une transformation linéaire. Dans l'affirmative déterminer son noyau et son image.

a) L'application déterminant $\det : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$.

b) L'application trace $\mathrm{Tr} : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$.

c) L'application dérivée $D : \mathbb{P}_n \longrightarrow \mathbb{P}_n$ qui associe à $p \in \mathbb{P}_n$ sa dérivée p'.

Question 9 Soient $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5/2 \\ -3 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix}$.
Déterminer si $\vec{w}$ est dans $\mathrm{Im}(A)$, dans $\mathrm{Ker}(A)$ ou bien dans les deux.

Question 10

1) Soit $T : \mathbb{R} \longrightarrow M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ donnée par $T(x) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$. Alors

- ☐ $\mathrm{Im}(T) = \{0\}$
- ☐ T est linéaire et injective
- ☐ $\mathrm{Im}(T) = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$
- ☐ T n'est pas linéaire

2) Soit $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ et $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Alors

- ☐ $V = \mathrm{Vect}(\vec{v_1}, \vec{v_2})$
- ☐ $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ n'engendrent pas V
- ☐ $\vec{v_2}$ engendre V.
- ☐ $V = \mathrm{Vect}(\vec{v_1})$.

3) Soit $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $T(x, y, z) = (x - y, y - z)$. Alors

- ☐ $\mathrm{Ker}(T) \neq \{0\}$ et $\mathrm{Im}(T) \neq \mathbb{R}^2$
- ☐ $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$ et $\mathrm{Im}(T) \neq \mathbb{R}^2$
- ☐ $\mathrm{Ker}(T) = \mathbb{R}^3$ et $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^2$
- ☐ $\mathrm{Ker}(T) = \{(x, x, x) \in \mathbb{R}^3\}$ et $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^2$

Question 11 Soit $V = \mathbb{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions réelles d'une variable réelle et soit $f \in V$. Dire lequel parmi les énoncés suivants est vrai.

- ☐ Si f est le vecteur nul de V, alors $f(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
- ☐ S'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f(t) = 0\ \forall\ t \geq n$, alors f est le vecteur nul de V.
- ☐ S'il existe $t \in \mathbb{R}$ avec $f(t) = 0$, alors f est le vecteur nul de V.
- ☐ Si $f(q) = 0$ pour tout $q \in \mathbb{Q}$, alors f est le vecteur nul de V.