Série 10

Mots-clés: Théorème du rang, matrice représentative d'une application linéaire.

Rappel : Soit $T : V \longrightarrow W$ une application linéaire.

- Le **rang** de T est le nombre $\text{rg}(T) = \dim(\text{Im}(T))$.
  Si T est une application matricielle, alors

$$\text{rang} \;=\; \text{nombre de pivots de sa matrice}$$

- Le **théorème du rang** affirme que

$$\dim(\text{Im}(T)) + \dim(\text{Ker}(T)) = \dim(V).$$

  Avec des matrices, ceci signifie que

$$\text{dimension de l'image} \;=\; \text{nombre de colonnes-pivots,}$$

$$\text{dimension du noyau} \;=\; \text{nombre de colonnes } \textbf{sans} \text{ pivots.}$$

Question 1 Soit V un espace vectoriel et une base $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \dots \vec{b}_n\}$. Démontrer que l'application coordonnées

$$[.]_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow \mathbb{R}^n,\ \vec{v} \mapsto [\vec{v}]_{\mathcal{B}}$$

est linéaire.

Question 2 Soient $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & b \end{pmatrix}$. Alors les matrices A_i, pour $i = 1, 2, 3, 4$, sont linéairement indépendantes

- ☐ lorsque $a \neq 0$ et $b = 3$.
- ☐ lorsque $a \neq 0$ et pour toutes valeurs de b.
- ☐ lorsque $a \neq 0$ et $b \neq 3$.
- ☐ pour toutes valeurs de a, b.

Question 3 Soit $W \subset \mathbb{R}^6$ donné par l'équation $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=0$.

On considère les vecteurs $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Alors

- ☐ On peut compléter $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}\}$ en une base de W composée de 6 vecteurs.
- ☐ On peut compléter $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}\}$ en une base de W composée de 5 vecteurs.
- ☐ On peut compléter $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\}$ en une base de W composée de 5 vecteurs.
- ☐ On peut compléter $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\}$ en une base de W composée de 6 vecteurs.

Question 4 Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 9 & -7 \\ -1 & 2 & -4 & 1 \\ 5 & -6 & 10 & 7 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que les matrices A et B ont la même forme échelonnée réduite.
(**NB:** on dit alors que A et B sont **ligne-équivalentes**)

b) Calculer $\mathrm{rg}(A)$ et $\dim(\mathrm{Ker} A)$.

c) Trouver une base pour chacun des sous-espaces $\mathrm{Im}(A)$, $\mathrm{Ker}(A)$ et $\mathrm{Ker}(A^T)$, ainsi que du sous-espace $\mathrm{Lgn}(A)$ engendré par les lignes de A.

Question 5 Soit V un espace vectoriel et $v_1, \ldots, v_k \in V$. Alors

- ☐ Si la famille $\{v_1, \ldots, v_k\}$ engendre l'espace vectoriel V, alors $\dim V = k$.
- ☐ Si la famille $\{v_1, \ldots, v_k\}$ est libre, alors $\dim V \geq k$.
- ☐ Si la famille $\{v_1, \ldots, v_k\}$ engendre l'espace vectoriel V, alors $\dim V \geq k$.
- ☐ Si la famille $\{v_1, \ldots, v_k\}$ est libre, alors $\dim V = k$.

Question 6 Il existe une matrice A de taille 3×7 telle que:

- ☐ $\dim \mathrm{Ker}(A) = 3$ et $\mathrm{rg}(A) = 4$
- ☐ $\dim \mathrm{Ker}(A) = 4$ et $\mathrm{rg}(A) \leq 2$
- ☐ $\dim \mathrm{Ker}(A) = 2$ et $\mathrm{rg}(A) \leq 4$
- ☐ $\dim \mathrm{Ker}(A) = 5$ et $\mathrm{rg}(A) = 2$

Question 7 Soit A une matrice inversible de taille 5×5. Laquelle des affirmations suivantes est vraie?

- ☐ $\mathrm{Ker}(A)$ est vide
- ☐ Les colonnes de A n'engendrent pas $\mathbb{R}^5$
- ☐ Les lignes de A sont linéairement indépendantes
- ☐ Le rang de A est strictement plus petit que 5

Question 8 Soit $T \colon \mathbb{P}_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $T(p) = p(-1) + p(0) + p(1)$. Alors

- ☐ $\dim \mathrm{Ker}(T) = 1$ et $\mathrm{rg}(T) = 2$
- ☐ $\dim \mathrm{Ker}(T) = 1$ et $\mathrm{rg}(T) = 1$
- ☐ T n'est pas linéaire
- ☐ $\dim \mathrm{Ker}(T) = 2$ et $\mathrm{rg}(T) = 1$

Question 9 Soit $T \colon \mathbb{P}_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $T(p) = p(-1) + p(0) + p(1)$. Une base du noyau de T est donnée par $\{-2 + t + 3t^2, 2 - 3t^2\}$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Rappel. Soit $T : V \longrightarrow W$ et deux bases

$$\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\} \subset V, \quad \mathcal{C} = \{\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_m\} \subset W.$$

Alors **la matrice représentative de T de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$** est définie par

$$M = \begin{pmatrix} [T(\vec{b}_1)]_{\mathcal{C}} & \dots & [T(\vec{b}_n)]_{\mathcal{C}} \end{pmatrix}.$$

Question 10

Soit $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la transformation linéaire définie par $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-y \\ x+3y \\ x-y \end{pmatrix}$ et les bases

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ de } \mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ de } \mathbb{R}^3.$$

a) Dans $\mathbb{R}^3$, calculer la matrice de changement de bases de la base canonique $\mathcal{B}_{can}$ vers $\mathcal{C}$.

   Rappel de la formule de l'inverse:

$$P_{\mathcal{C}\mathcal{B}} = \left(\vec{c}_1 \dots \vec{c}_n\right)^{-1} \left(\vec{b}_1 \dots \vec{b}_n\right).$$

b) En déduire la matrice de T de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{C}$.

Question 11 On considère la transformation $T : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{P}_2$ définie par

$$T(a + bt + ct^2 + dt^3) = (a + b + c + d) + (a + b)t + (c + d)t^2.$$

a) Donner la matrice M de T dans les bases $\mathcal{B} = \{1, t, t^2, t^3\}$ de $\mathbb{P}_3$ et $\mathcal{C} = \{1, t, t^2\}$ de $\mathbb{P}_2$. La mettre sous forme échelonnée réduite.

b) Déterminer la dimension et une base de $\mathrm{Im}(M)$ et $\mathrm{Ker}(M)$ respectivement.

c) En déduire une base de $\mathrm{Im}(T)$ et $\mathrm{Ker}(T)$.

d) Vérifier que le polynôme $7 + 5t + 2t^2$ est bien dans l'image de T et donner ses coordonnées dans la base trouvée en b).

e) Vérifier que le polynôme $2 - 2t - 5t^2 + 5t^3$ est bien dans le noyau de T et donner ses coordonnées dans la base trouvée en b).

Question 12 Considérer l'application linéaire $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ définie par

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \\ x_3 + x_4 \\ x_1 + x_4 \end{pmatrix}$$

et une base

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

a) Dans $\mathbb{R}^4$, calculer la matrice de changement de bases de la base canonique $\mathcal{B}_{can}$ vers $\mathcal{B}$.

b) Donner la matrice représentative de T dans la base $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}$.

Question 13 Soit $T : \mathbb{P}_2 \longrightarrow M_{2\times 2}$ définie par

$$T(a + bt + ct^2) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix}$$

et des bases

$$\mathcal{B} = \{1 - t, t + t^2, t^2\}, \quad \mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Calculer la matrice de T dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.