Durée : 60 minutes

EPFL

Algèbre linéaire
Test intermédiaire
GC/SIE/SC
Automne 2024

Réponses

Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :

$+3$ points si la réponse est correcte,

0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs réponses,

-1 point si la réponse est incorrecte.

Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :

$+1$ point si la réponse est correcte,

0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs réponses,

-1 point si la réponse est incorrecte.

Notation

– Pour une matrice A, a_{ij} désigne l'élément situé sur la ligne i et la colonne j de la matrice.
– Pour un vecteur $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, x_i désigne la i-ème composante de $\vec{x}$.
– I_m désigne la matrice identité de taille $m \times m$.
– $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n.
– $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices de taille $m \times n$ à coefficients réels.

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 : Soient

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{et} \quad \mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

deux bases de $\mathbb{R}^3$. Soit P la matrice de changement de base de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{C}$, telle que $\left[\vec{x}\right]_{\mathcal{C}} = P\left[\vec{x}\right]_{\mathcal{B}}$ pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$. Alors la deuxième ligne de P est

☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
☐ $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
☐ $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
■ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Question 2 : Soit $\mathcal{B} = \left\{2 - t,\ t + t^2,\ -1 + t^3,\ -1 - t + 2t^2\right\}$ une base de $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$. La quatrième coordonnée du polynôme $p(t) = t + 2t^2 + 3t^3$ par rapport à la base $\mathcal{B}$ est égale à

☐ -7
☐ $\frac{1}{7}$
■ $-\frac{1}{7}$
☐ 3

Question 3 : Soient

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} a & 3b & c \\ d + 2a & 3e + 6b & f + 2c \\ g & 3h & k \end{pmatrix}$$

deux matrices de taille 3×3. Si $\det(A) = 1$, alors on a

☐ $\det(B) = 1$
■ $\det(B) = 3$
☐ $\det(B) = 6$
☐ $\det(B) = 2$

Question 4 : Soit $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ l'application linéaire définie par

$$T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x - y \\ x - y \\ -5x + 6y \\ x + y \end{pmatrix}.$$

Alors

☐ T est injective et surjective
☐ T est surjective mais pas injective
■ T est injective mais pas surjective
☐ T n'est ni injective ni surjective

Question 5 : Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & \sqrt{3} & \pi & 3 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & \pi & 3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & 1 & \pi & 3 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Alors

☐ $\det(A) = \sqrt{6}\pi$ ☐ $\det(A) = 12\pi$ ☐ $\det(A) = 0$ ■ $\det(A) = -6\pi$

Question 6 : Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors l'inverse $B = A^{-1}$ de la matrice A est tel que

☐ $b_{41} = \frac{1}{3}$ ☐ $b_{33} = -\frac{1}{13}$ ■ $b_{33} = \frac{4}{39}$ ☐ $b_{43} = \frac{2}{3}$

Question 7 : Le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 0 \\ \phantom{x_1 + {}} x_2 + 2x_3 + x_4 = 7 \\ \phantom{x_1 + {}} x_2 + 3x_3 - 5x_4 = -4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 1 \end{cases}$$

possède une solution unique telle que

☐ $x_1 = 2$ ■ $x_1 = -3$ ☐ $x_1 = -2$ ☐ $x_1 = 3$

Question 8 : Soit t un paramètre réel. Les vecteurs

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} t \\ -9 \\ 8 \end{pmatrix}$$

sont linéairement dépendants si et seulement si

■ $t = 5$ ☐ $t = -5$ ☐ $t \neq 5$ ☐ $t \neq -5$

Deuxième partie, questions de type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

Question 9 : Si A et B sont deux matrices inversibles de taille $n \times n$ telles que $A + B$ n'est pas la matrice nulle, alors $A + B$ est aussi inversible.

☐ VRAI ■ FAUX

Question 10 : Soit $\{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_m\}$ une base de $\mathbb{R}^m$. Si A est une matrice de taille $m \times n$ telle que l'équation $A\vec{x} = \vec{b}_k$ possède au moins une solution pour tout $k = 1, \ldots, m$, alors $\mathrm{Im}(A) = \mathbb{R}^m$.

■ VRAI ☐ FAUX

Question 11 : Soit A une matrice de taille $m \times n$ avec $m < n$. Si la forme échelonnée réduite de A possède exactement k lignes nulles, alors l'ensemble des solutions du système homogène $A\vec{x} = \vec{0}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension $n - k$.

☐ VRAI ■ FAUX

Question 12 : Soit A une matrice de taille $n \times n$ et soit $T \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ l'application linéaire définie par $T(\vec{x}) = A\vec{x}$, pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Si A est telle que $A^5 = 0$, alors T est surjective.

☐ VRAI ■ FAUX

Question 13 : Soit $W = \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : A = A^T\}$. Alors W est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ de dimension 3.

■ VRAI ☐ FAUX

Question 14 : Soit q un polynôme de degré 3 quelconque. Alors l'ensemble

$$\{p \in \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) : q(0) - p(0) = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$.

☐ VRAI ■ FAUX

Question 15 : Soit $A \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$ une matrice de rang 3. Si $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont des vecteurs linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^4$, alors $A\vec{u}$, $A\vec{v}$, $A\vec{w}$ sont linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^4$.

☐ VRAI ■ FAUX

Question 16 : Si $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique, alors

$$\det(A - A^T) = \det(A) - \det(A^T).$$

■ VRAI ☐ FAUX

Question 17 : Soit W le sous-espace vectoriel de $\mathbb{P}_5(\mathbb{R})$ engendré par $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathbb{P}_5(\mathbb{R})$. Si $\dim(W) = 4$, alors il existe deux polynômes $p_5, p_6 \in \mathbb{P}_5(\mathbb{R})$ tels que la famille $\mathcal{B} = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6\}$ est une base de $\mathbb{P}_5(\mathbb{R})$.

■ VRAI ☐ FAUX