Série 8

Mots-clés: espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels, applications linéaires entre espaces vectoriels

Rappel. Soit V un espace vectoriel muni d'une addition $+$ et multiplication scalaire $\cdot$. Un sous-ensemble $W \subset V$ est un **sous-espace vectoriel de V** si W satisfait les trois propriétés suivantes :

(1) $W \neq \varnothing$

(2) $\vec{v} + \vec{w} \in W, \quad \forall \vec{v}, \vec{w} \in W$

(3) $\lambda \cdot \vec{v} \in W, \quad \forall \vec{v} \in W$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

Question 1 Soit V un espace vectoriel muni d'une addition $+$ et multiplication scalaire $\cdot$. Démontrer qu'un sous-ensemble $W \subset V$ est un sous-espace vectoriel si et seulement si W satisfait la "caractérisation simplifiée" :

(1') $0_V \in W$

(2') $\lambda \cdot \vec{v} + \vec{w} \in W, \quad \forall \vec{v}, \vec{w} \in W$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Solution: Nous devons démontrer que $(1) + (2) + (3) \iff (1') + (2')$.

($\implies$) Supposons que W est un sous-espace vectoriel. Il satisfait donc les propriétés (1) à (3). Démontrons que W satisfait nécessairement (1') et (2').

(1') Puisque W est non-vide par (1), alors il existe $\vec{v} \in W$.
Par (3), avec $\lambda = -1$, nous avons aussi $-\vec{v} \in W$.
Par (2), nous avons finalement $0_V = \vec{v} + (-\vec{v}) \in W$.

(2') Soient $\vec{v}, \vec{w} \in W$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Par (3), nous avons $\lambda \cdot \vec{v} \in W$. Par (2), nous avons donc $\lambda \cdot \vec{v} + \vec{w} \in W$.

($\impliedby$) Réciproquement, supposons que W satisfait (1') et (2'). Démontrons que W satisfait nécessairement les propriétés (1) à (3).

(1) Par (1'), on a direcctement $0_V \in W \neq \varnothing$

(2) Soient $\vec{v}, \vec{w} \in W$. Alors par (2') avec $\lambda = 1$, nous avons directement $\vec{v} + \vec{w} = 1 \cdot \vec{v} + \vec{w} \in W$

(3) Soient $\vec{v} \in W$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors par (2') avec $\vec{w} = 0_V$, et la définition de l'élément neutre, nous avons directement $\lambda\vec{v} = \lambda\vec{v} + 0_V \in W$.

Question 2 Lesquels des ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$?

a) Un cube plein dans $\mathbb{R}^3$, centré à l'origine.

b) La diagonale $\Delta = \{(x, x, \cdots, x) \in \mathbb{R}^n\}$.

c) Un sous-ensemble qui possède 2143 éléments.

d) La réunion de tous les axes de coordonnées.

e) L'ensemble des points à coordonnées entières.

Solution:

a) Le cube n'est pas un sous-espace vectoriel: Si x est un point sur le bord du cube alors $2x$ est à l'extérieur du cube.

b) C'est un sous-espace vectoriel: soient $u = (x, x, \ldots, x)$ et $v = (y, y, \ldots, y)$ dans Δ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $\lambda u + v = (\lambda x + y, \ldots, \lambda x + y) \in \Delta$.

c) Tout espace vectoriel réel est soit l'espace trivial, soit infini: Si l'espace n'est pas trivial, il contient un élément $x \neq 0$. Mais alors il contient les éléments nx pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc il est infini. L'ensemble en question ne peut donc pas être un espace vectoriel.

d) Si $n \geq 2$ ce n'est pas un sous-espace vectoriel car (par exemple) il ne contient pas $e_1 + e_2$. Si $n = 1$ l'axe de coordonnée est égal à l'espace entier et donc c'est un sous-espace vectoriel.

e) Ce n'est pas un sous-espace vectoriel: Le vecteur $(1, 0, \ldots, 0)$ en fait partie mais pas $\frac{1}{2} \cdot (1, 0, \ldots, 0)$.

Question 3 Soit $V = \mathbb{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Lesquels des ensembles suivants sont des sous-espaces de V?

a) $V_1 = \{f \in V \mid f(0) = f(1)\}$.

b) $V_2 = \{f \in V \mid f(x) \geq 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}\}$.

c) $V_3 = \{f \in V \mid f \text{ est bijective}\}$.

Solution:

a) Soient $f, g \in V_1$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Il faut vérifier que $\lambda f + g \in V_1$. Calculons: $(\lambda f + g)(0) = (\lambda f)(0) + g(0) = \lambda f(0) + g(0) = \lambda f(1) + g(1) = (\lambda f + g)(1)$. Donc $\lambda f + g \in V_1$ et V_1 est bien un sous-espace vectoriel.

b) Ce n'est pas un sous-espace vectoriel. L'opposé de la fonction f définie par $f(0) = 1$ et $f(x) = 0$ pour $x \neq 0$ n'est pas un élément de V_2.

c) Ce n'est pas un sous-espace vectoriel: La fonction $0 \in V$ n'est pas bijective.

Question 4 Soit $\mathbb{P}_n$, l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. Lesquels des sous-ensembles suivants de $\mathbb{P}_n$ sont des sous-espaces vectoriels?

a) L'ensemble $V_1 = \{p \in \mathbb{P}_n \mid p(1) = 0\}$.

b) L'ensemble V_2 de tous les polynômes de degré exactement n.

c) L'ensemble $V_3 = \{p \in \mathbb{P}_n \mid p(0) = 0\}$.

Solution:

a) V_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{P}_n$. Si p et q sont deux éléments de cet ensemble alors $\lambda p + q$ en fait aussi partie puisque $(\lambda p + q)(1) = \lambda p(1) + q(1) = \lambda \cdot 0 + 0 = 0$.

b) V_2 n'est pas un sous-espace vectoriel: Le polynôme 0 n'est pas dans cet ensemble.

c) V_3 est un sous-espace vectoriel. Si $p_1(0) = 0$ et $p_2(0) = 0$ alors $(\lambda p_1 + p_2)(0) = \lambda p_1(0) + p_2(0) = 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Question 5 Soit $M_{n\times n}(\mathbb{R})$, l'espace vectoriel des matrices $n \times n$ à coefficients réels. Lesquels des ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $M_{n\times n}(\mathbb{R})$?

a) L'ensemble des matrices triangulaires supérieures dans $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, i.e. des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

b) L'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

c) L'ensemble des matrices de trace nulle.
*Note : la **trace** d'une matrice carrée est la somme des coefficients sur sa diagonale.*

d) L'ensemble des matrices de déterminant nul.

e) L'ensemble des matrices A telles que $A^4 = -I_n$.

Solution:

a) Soient $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $\lambda M + N = \begin{pmatrix} \lambda a + a' & \lambda b + b' \\ 0 & \lambda c + c' \end{pmatrix}$ qui est une matrice triangulaire supérieure. Donc c'est un sous-espace vectoriel.

b) Ce n'est pas un sous-espace vectoriel: La matrice 0 n'est pas dans l'ensemble.

c) C'est un sous-espace vectoriel. Soient M, N de trace nulle et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Il faut vérifier que la trace de $\lambda M + N$ est 0:

$$\mathrm{Tr}(\lambda M + N) = \mathrm{Tr}(\lambda M) + \mathrm{Tr}(N) = \lambda \mathrm{Tr}(M) + \mathrm{Tr}(N) = 0.$$

d) Ce n'est pas un sous-espace vectoriel. Par exemple $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont de déterminant nul mais leur somme est égal à la matrice I_2 qui est de déterminant 1.

e) C'est ensemble est vide! En effet si $A^4 = -I_n$ alors $\det(A^4) = \det(-I_n)$ et par les propriétés du déterminant on trouve $\det(A)^4 = -1$ ce qui n'est pas possible dans $\mathbb{R}$. Ce n'est donc pas un sous-espace vectoriel.

Question 6 Soit V un espace vectoriel et $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3} \in V$. Décrire explicitement le sous-espace $\text{Span}(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3})$ engendré par $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$ dans les cas suivants:

a) $V = \mathbb{R}^3$, $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) $V = \mathbb{P}_3$, $\vec{v_1} = t$, $\vec{v_2} = t^2$, $\vec{v_3} = t^3$.

Solution:

a) On constate d'abord que toute combinaison linéaire $\alpha\vec{v_1} + \beta\vec{v_2} + \gamma\vec{v_3}$ est un vecteur dont la troisième composante est nulle. On affirme ensuite que tout vecteur $\vec{v}$ du plan Oxy se trouve dans le sous-espace engendré par ces trois vecteurs. En effet l'équation vectorielle $\alpha\vec{v_1} + \beta\vec{v_2} + \gamma\vec{v_3} = \vec{v}$ a toujours une solution dans ce cas (écrire un système pour le voir). On conclut que $\text{Span}(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3})$ est le plan horizontal Oxy dans $\mathbb{R}^3$.

b) Une combinaison linéaire $\alpha t + \beta t^2 + \gamma t^3 = t(\alpha + \beta t + \gamma t^2)$ est un polynôme de $\mathbb{P}_3$ sans terme constant. Autrement dit le sous-espace engendré par t, t^2 et t^3 est le sous-espace des polynômes qui sont multiples de t.

Question 7 On travaille dans $V = \mathbb{P}_3$.
Soient $p_1(t) = 1 - t$, $p_2(t) = t^3$, $p_3(t) = t^2 - t + 1$.
Est-ce que le polyôme $q(t) = t^3 - 2t + 1$ appartient à $\text{Vect}(p_1, p_2, p_3)$?

Solution:

On essaie de trouver les coefficients de la combinaison linéaire (s'ils existent) $q(t) = \alpha_1 p_1(t) + \alpha_2 p_2(t) + \alpha_3 p_3(t)$. C'est-à-dire

$$\begin{aligned} q(t) &= \alpha_1(1 - t) + \alpha_2 t^3 + \alpha_3(t^2 - t + 1) \\ &= (\alpha_1 + \alpha_3) + (-\alpha_1 - \alpha_3)t + \alpha_3 t^2 + \alpha_2 t^3 \end{aligned}$$

Pour que cette égalité soit vraie, il faut que les coefficients de chaque monôme (les coefficients devant $1, t, t^2, t^3$) soient égaux. Donc on doit résoudre

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = 1 \\ -\alpha_1 - \alpha_3 = -2 \\ \alpha_2 = 1 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Ce qui n'est pas possible car on devrait avoir $\alpha_1 = 1$ et $\alpha_1 = 2$ (vu que $\alpha_3 = 0$). Donc $q(t)$ n'est pas dans le $\text{Vect}(p_1, p_2, p_3)$.

Question 8 Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier $n \geq 1$. Pour chacune des applications suivantes, déterminer et justifier si c'est une transformation linéaire. Dans l'affirmative déterminer son noyau et son image.

a) L'application déterminant $\det : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$.

b) L'application trace $\mathrm{Tr} : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$.

c) L'application dérivée $D : \mathbb{P}_n \longrightarrow \mathbb{P}_n$ qui associe à $p \in \mathbb{P}_n$ sa dérivée p'.

Solution:

a) Si $n \geq 2$, ce n'est pas une transformation linéaire. Par exemple $\det(I_n + I_n) \neq \det(I_n) + \det(I_n)$.

b) C'est une transformation linéaire: $\mathrm{Tr}(\lambda M+N) = \mathrm{Tr}(\lambda M)+\mathrm{Tr}(N) = \lambda\mathrm{Tr}(M)+\mathrm{Tr}(N)$ pour tout $M, N \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Le noyau de l'application trace est donné par $\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) = \{M \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid \mathrm{Tr}(M) = 0\}$. L'application Tr est surjective: en effet, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, il existe une matrice M telle que $\mathrm{Tr}(M) = \lambda$ (il suffit de prendre une matrice diagonale avec $M_{1,1} = \lambda$ et $M_{i,i} = 0$ pour $i > 1$). Donc $\mathrm{Im}(\mathrm{Tr}) = \mathbb{R}$.

c) C'est une transformation linéaire: La dérivée de $(\lambda p_1 + p_2)$ est $(\lambda p_1 + p_2)' = \lambda p_1' + p_2'$. Donc on a bien $D(\lambda p_1 + p_2) = \lambda D(p_1) + D(p_2)$.

   Le noyau de la dérivée est $\mathrm{Ker}(D) = \{p \in \mathbb{P}_n \mid p'(t) = 0 \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}\}$. Or les seuls polynômes à dérivée nulle sont les polynômes constants, donc $\mathrm{Ker}(D) = \{c \mid c \in \mathbb{R}\}$. L'application dérivée baisse le degré d'un polynôme de 1. Ainsi cette application n'est pas surjective (par exemple $p(t) = t^n$ n'appartient pas à $\mathrm{Im}(D)$). De plus, tout polynôme de degré $n-1$ est dans l'image de D: en effet si $q(t) = a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$ en prenant $p(t) = \frac{a_{n-1}}{n}t^n + \cdots + \frac{a_1}{2}t^2 + a_0 t$ on a bien $D(p) = p'(t) = q(t)$. Donc $\mathrm{Im}(D) = \mathbb{P}_{n-1}$.

Question 9 Soient $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5/2 \\ -3 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix}$.
Déterminer si $\overrightarrow{w}$ est dans $\mathrm{Im}(A)$, dans $\mathrm{Ker}(A)$ ou bien dans les deux.

Solution: Le vecteur $\overrightarrow{w}$ est dans $\mathrm{Ker}(A)$: il s'agit d'un calcul $A\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$.
Le vecteur $\overrightarrow{w}$ est aussi dans $\mathrm{Im}(A)$ car le système $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{w}$ est compatible (il suffit d'examiner la forme échelonnée réduite de sa matrice augmentée). Ainsi, il existe au moins un vecteur, par exemple $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, tel que $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{w}$.

Question 10

1) Soit $T : \mathbb{R} \longrightarrow M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ donnée par $T(x) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$. Alors

- [ ] $\mathrm{Im}(T) = \{0\}$
- [ ] $\mathrm{Im}(T) = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$
- [x] T est linéaire et injective
- [ ] T n'est pas linéaire

2) Soit $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ et $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Alors

- [x] $V = \mathrm{Vect}(\vec{v_1}, \vec{v_2})$
- [ ] $\vec{v_2}$ engendre V.
- [ ] $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ n'engendrent pas V
- [ ] $V = \mathrm{Vect}(\vec{v_1})$.

3) Soit $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $T(x, y, z) = (x - y, y - z)$. Alors

- [ ] $\mathrm{Ker}(T) \neq \{0\}$ et $\mathrm{Im}(T) \neq \mathbb{R}^2$
- [ ] $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$ et $\mathrm{Im}(T) \neq \mathbb{R}^2$
- [ ] $\mathrm{Ker}(T) = \mathbb{R}^3$ et $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^2$
- [x] $\mathrm{Ker}(T) = \{(x, x, x) \in \mathbb{R}^3\}$ et $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^2$

Solution:

1) T est linéaire et injective. En effet on voit facilement que $T(x) + T(y) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y & 0 \\ 0 & x+y \end{pmatrix} = T(x + y)$ et $T(\lambda x) = \lambda T(x)$. De plus $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$ de façon évidente.

2) On a que $V = \mathrm{Vect}(\vec{v_1}, \vec{v_2})$. En effet $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V \iff x + y + z = 0$, donc $z = -x - y$ de sorte que $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Ceci montre que tout élément de V est combinaison linéaire de $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$.

3) On a que $\mathrm{Ker}(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x - y, y - z) = (0, 0)\}$. Donc $(x, y, z) \in \mathrm{Ker}(T) \iff x = y = z$ donc $\mathrm{Ker}(T) = \Delta = \{(x, x, x) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}\}$. Pour trouver l'image de T on regarde l'espace des colonnes de la matrice associée à T: on a que $A_T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et donc $\mathrm{Im}(T) = \mathrm{Vect}(\vec{e_1}, \vec{e_2}) = \mathbb{R}^2$.

Question 11 Soit $V = \mathbb{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions réelles d'une variable réelle et soit $f \in V$. Dire lequel parmi les énoncés suivants est vrai.

- [x] Si f est le vecteur nul de V, alors $f(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
- [ ] S'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f(t) = 0 \ \forall \ t \geq n$, alors f est le vecteur nul de V.
- [ ] S'il existe $t \in \mathbb{R}$ avec $f(t) = 0$, alors f est le vecteur nul de V.
- [ ] Si $f(q) = 0$ pour tout $q \in \mathbb{Q}$, alors f est le vecteur nul de V.

Solution: La seule bonne réponse est: Soit f un vecteur de l'espace vectoriel V des fonctions réelles d'une variable réelle. Si f est le vecteur nul de V, alors $f(t) = 0$ pour tout nombre réel t.
Les autres affirmations sont toutes incorrectes pour la même raison. Il ne suffit pas de s'annuler en un point pour être le vecteur nul (ni en une infinité de points). La fonction nulle est la fonction constamment nulle, le polynôme nul est le polynôme 0, la suite nulle est la suite constamment nulle. Seuls ces vecteurs ont la propriété de ne pas modifier le vecteur auquel on les additionne.