Examen Propédeutique d'algèbre linéaire I

14 janvier 2020, 12:15 – 15:15

Nom :

Prénom :

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- Ce cahier fait XX pages. Vérifier que votre cahier est complet.
- Les feuilles de brouillon sont pour vos calculs, elles ne seront pas corrigées.
- Ne pas dégrafer le cahier !
- L'examen contient 13 problèmes, le total est de 100 points.
- Ne pas écrire au crayon, ni au stylo rouge.
- Documents autorisés: aucun !
- Aucun appareil électronique (machine à calculer, téléphone, tablette, montre connectée...)
- Pour les questions à choix multiple il n'y a qu'une réponse correcte. On compte +5 points pour une réponse correcte et -2 points pour une réponse fausse. Si vous ne savez pas répondre il faut l'indiquer (il ne vaut pas la peine de répondre au hasard).
- A la fin de l'examen, vous laisserez votre copie sur la table, ainsi que toutes les feuilles de brouillons.

1	2	3	4	5	6	7	8

9	10	11	12	13	Total	Note

Bon travail et bonne chance !

Partie I : Questions à choix multiples

Exercice 1. [5 points.] On considère les matrices suivantes de $M_n(\mathbb{R}^2)$ (on suppose que $|v| < 1$).

$$L = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1-v^2}} & \dfrac{v}{\sqrt{1-v^2}} \\ \dfrac{v}{\sqrt{1-v^2}} & \dfrac{1}{\sqrt{1-v^2}} \end{pmatrix}, \qquad H = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Laquelle parmi les relations suivantes est-elle correcte ? (une seule réponse):

- ☐ $LHL^{-1} = H$.
- ☐ $LHL^{-1} = -H$.
- ☐ $LHL = H$.
- ☐ $LHL = -H$.
- ☐ Ne sais pas.

Exercice 2. [5 points.] On considère les trois vecteurs suivants de $\mathbb{C}^3$:

$$u := \begin{pmatrix} 0 \\ 2i \\ x \end{pmatrix}, \quad v := \begin{pmatrix} y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad w := \begin{pmatrix} 3i \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Répondre au QCM :

- ☐ La famille $\{u, v, w\}$ est toujours libre sauf si $x = 0$.
- ☐ La famille $\{u, v, w\}$ est liée si et seulement si $2y + 3x^2 = 0$.
- ☐ La famille $\{u, v, w\}$ est libre si et seulement si $2x^2 + 3y = 0$.
- ☐ La famille $\{u, v, w\}$ est liée si et seulement si $2y - 3x^2 = 0$.
- ☐ Ne sais pas.

Exercice 3. [5 points.] On considère la matrice $A \in M_3(R)$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Répondre au QCM

- ☐ A est de rang 1 et $\mathrm{Ker}(A)$ est engendré par $(-1, 2, 2)$.
- ☐ A est inversible.
- ☐ A est de rang 2 et $\mathrm{Im}(A)$ est engendrée par $\{(1, 2, 3), (4, 5, 6)\}$.
- ☐ A est de rang 2 et $\mathrm{Ker}(A)$ est engendré par $(-1, 2, 2)$.
- ☐ Ne sais pas.

Exercice 4. [5 points.]
On considère les matrices $A \in M_3(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 5a & 5b & 5c \\ g & h & i \\ 3d+g & 3e+h & 3f+i \end{pmatrix}$$

Sachant que $\det A = 5$, que vaut le déterminant de B ?

- ☐ $\det B = 25$.
- ☐ $\det B = 75$.
- ☐ $\det B = -25$.
- ☐ $\det B = -75$.
- ☐ Ne sais pas.

Exercice 5. [5 points.] Soit $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ les fonctions définies par

$$\varphi_1(x) = \cos(2x), \quad \varphi_2(x) = \cos^2(x), \quad \varphi_3(x) = 5\sin^2(x).$$

Laquelle des assertions suivantes est correcte ?

- ☐ φ_3 est combinaison linéaire de φ_1 et φ_2.
- ☐ $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ est une partie liée.
- ☐ $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ est une partie libre.
- ☐ $\varphi_2 \notin \mathrm{Vec}(\varphi_1, \varphi_3)$.
- ☐ Ne sais pas.

Exercice 6. [5 points.] On considère la permutation $\rho = \sigma^{-1} \circ \tau \in \mathcal{S}_4$ où σ et τ sont donnés par

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Alors la décomposition de ρ en produit de cycles disjoints est

- ☐ $\rho = (4\ 3\ 2)$
- ☐ $\rho = (2\ 3)(1\ 4)$
- ☐ $\rho = (1\ 3\ 4)$
- ☐ $\rho = (2\ 1\ 4)$
- ☐ Ne sais pas.

Exercice 7. [5 points.]
Soient $f, g \in \mathcal{L}(V, W)$ deux applications linéaires entre les K-espaces vectoriels V et W. On suppose que $W \neq \{0\}$, $\dim(V) = 5$ et

$$V = \ker(f) \oplus \ker(g).$$

Laquelle parmi les affirmations suivante est **fausse** (i.e. fausse dans un cas au moins) :

- ☐ Si f est surjective, alors g n'est pas injective.
- ☐ Si f est injective, alors $\operatorname{rang}(g) = 5$.
- ☐ Si f est surjective et $\operatorname{rang}(g) = 1$, alors $\dim(W) = 4$.
- ☐ Si $\operatorname{rang}(g) = 2$, alors $\operatorname{rang}(f) = 3$.
- ☐ Ne sais pas.

Exercice 8. [5 points.] Rappelons que pour une matrice carrée $X \in \mathrm{M}_n(K)$ et un entier naturel m on note $X^m = \mathrm{I}_n$ si $m = 0$ et $X^m = X \cdots X$ (m-fois) si $m \geq 1$.
Soient $m \in \mathbb{N}$ et $A, B \in \mathrm{M}_n(K)$, on suppose que B est inversible:

L'identité

$$\text{(I) :} \qquad (BAB^{-1})^m = A^m \quad \textit{pour tout} \quad m$$

est-elle vraie dans les cas suivants :

- ☐ (I) est vraie si et seulement si m est pair.
- ☐ (I) est vraie pour tout $m \in \mathbb{N}$ si et seulement si A est inversible.
- ☐ (I) est vraie pour tout $m \in \mathbb{N}$ si et seulement si A et B commutent.
- ☐ (I) est vraie pour tout $m \in \mathbb{N}$ si et seulement si A et B ont le même rang.
- ☐ Ne sais pas.

Exercice 9. [5 points.] On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Répondre au QCM :

- ☐ A est inversible et $\operatorname{Tr}(A^{-1}) = \dfrac{1}{5}$
- ☐ A est inversible et $\operatorname{Tr}(A^{-1}) = -\dfrac{2}{5}$
- ☐ A n'est pas inversible.
- ☐ A est inversible et $\operatorname{Tr}(A^{-1}) = -\dfrac{1}{5}$
- ☐ Ne sais pas.

Exercice 10. [5 points.] Soient V et W deux sous-espaces vectoriels de $M_{2\times 4}(\mathbb{R})$ (l'espace vectoriel des matrices réelles de taille 2×4). On suppose que $\dim(V) = 4$ et $\dim(W) = 6$.

Que peut-on dire sur la dimension de $V \cap W$?

- ☐ On a nécessairement $2 \leq \dim(V \cap W) \leq 4$.
- ☐ $\dim(V \cap W)$ peut prendre toutes les valeurs entre 0 et 3.
- ☐ On a toujours $\dim(V \cap W) = 4$.
- ☐ On a toujours $\dim(V \cap W) \in \{4, 5, 6\}$.
- ☐ Ne sais pas.

Partie II : Questions ouvertes

Exercice 11. [21 points.]

a) Définir la notion de groupe.

b) Définir les notions de sous-groupe et d'homomorphisme de groupes.

c) Définir le noyau $\mathrm{Ker}(f)$ d'un homomorphisme de groupes $f : G_1 \to G_2$ et prouver que c'est un sous-groupe de G_1.

d) Définir le groupe linéaire $GL_n(K)$ sur un corps K et prouver qu'il s'agit d'un groupe.

e) Fixons un réel λ quelconque et définissons

$$G_\lambda = \left\{ \begin{pmatrix} a & \lambda b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in K,\ a^2 - \lambda b^2 \neq 0 \right\}.$$

Prouver que G_λ est un groupe pour le produit matriciel.

f) Prouver que

$$S_\lambda = \{A \in G_\lambda \mid a^2 - \lambda b^2 = 1\}$$

est un sous-groupe de G_λ.

g) Prouver que pour $\lambda = -1$, le groupe $G_\lambda = G_{-1}$ est isomorphe à $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Exercice 12. [16 points.]
On note $\mathcal{F}_0$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel

$$\mathcal{F}_0 := \left\{\varphi(x) = (a + bx + cx^2)\mathrm{e}^{2x} \mid a, b, c \in \mathbb{R}\right\}.$$

a) Prouver que les fonctions $\varphi_1(x) = \mathrm{e}^{2x}$, $\varphi_2(x) = x\mathrm{e}^{2x}$ $\varphi_3(x) = x^2\mathrm{e}^{2x}$ forment une base de $\mathcal{F}_0$.

b) On admet que l'opérateur $T : \mathcal{F}_0 \to \mathcal{F}_0$ défini par $T(\varphi) = \varphi' - \varphi$ est une application linéaire (φ' est ici la dérivée de la fonction φ).
On demande de calculer la matrice de T dans la base $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$.

c) On note A la matrice trouvée en (b). Prouver que A est inversible et calculer la matrice inverse A^{-1}.

d) Utiliser le calcul précédent pour trouver une solution particulière de l'équation différentielle

$$f'(x) - f(x) = (2x^2 - x + 1)\mathrm{e}^{2x}.$$

e) (question bonus) Trouver la solution générale de l'équation différentielle en (d) (la solution générale n'appartient pas forcément à l'espace $\mathcal{F}_0$).

Exercice 13. [15 points.]
Soient V un K-espace de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(V, V)$ deux endomorphismes de V.

(a) Définir ce qu'est le *rang* de f.

(b) Enoncer le théorème du rang.

(c) Prouver que si $\mathrm{rang}(f \circ g) = \mathrm{rang}(f)$, alors $\mathrm{rang}(f) \leq \mathrm{rang}(g)$.

(d) Prouver que si $\mathrm{rang}(g \circ f) = \mathrm{rang}(f)$, alors $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(g) = \{0\}$.

(e) Supposons que $f \circ f = f$. Montrer qu'alors $V = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.