## Série 9

12 novembre

**Notation**: Soit $p$ un nombre premier. On note $\mathbb{F}_p$ le corps fini à $p$ éléments et écrira simplement $a$ pour $\bar{a}$, pour un élément $\bar{a}$ de $\mathbb{F}_p$.
On fixe un corps $K$.
On écrira $M_n(K)$ pour $M_{n\times n}(K)$.
Dans cette série et toutes les suivantes, on utilisera les deux notations $A \subset B$ et $A \subseteq B$ pour indiquer qu'une partie $A$ est un sous-ensemble d'une partie $B$, c'est-à-dire que tout élément de la partie $A$ appartient à la partie $B$.

---

A cette série, vous pouvez rendre pour correction l'exercice 3. Il faut le donner à un des assistants de votre salle d'exercices au plus tard lors de la séance d'exercices du 19 novembre.

Les exercices notés avec (†) sont plus difficiles, mais un bon entrainement pour utiliser la théorie du cours.

---

**Exercice 1.** *Soit $\alpha : \mathbb{C}[t]_{\leq 3} \to \mathbb{C}[t]_{\leq 3}$ l'application linéaire envoyant $f(t)$ vers $2f'(t) - f(t)$ et $\beta : \mathbb{C}[t]_{\leq 3} \to \mathbb{C}[t]_{\leq 2}$ l'application linéaire envoyant $f(t)$ vers $f'(t)$.*

*a) Déterminer la matrice de $\alpha$ par rapport à la base ordonnée $E = (1, t, t^2, t^3)$ de $\mathbb{C}[t]_{\leq 3}$.*

*b) Déterminer la matrice de $\beta$ par rapport aux bases $E$ de $\mathbb{C}[t]_{\leq 3}$ et $E' = (1, t, t^2)$ de $\mathbb{C}[t]_{\leq 2}$.*

*c) Déterminer la matrice de $\beta \circ \alpha$ par rapport aux bases $E$ et $E'$ de $\mathbb{C}[t]_{\leq 3}$ et de $\mathbb{C}[t]_{\leq 2}$.*

**Exercice 2** (Résultat à retenir)**.** *Soit $\phi : M_{r\times s}(K) \to M_{s\times r}(K)$ l'application définie par $\phi(A) = A^t$.*

*(a) Démontrer que pour toute matrices $A \in M_{p\times q}(K)$, $B \in M_{q\times r}(K)$, on a $(AB)^t = B^t A^t$.*

*(b) Montrer que $\phi$ est une application $K$-linéaire bijective.*

*(c) Dans le cas particulier $r = 1$ et $s = 3$, donner la matrice de $\phi$ par rapport aux bases ordonnées $E = (E_{11}, E_{12}, E_{13})$ et $F = (E_{31}, E_{21}, E_{11})$ de $M_{1\times 3}(K)$ et $M_{3\times 1}(K)$, respectivement. (Attention à l'ordre dans la base $F$.)*

**Exercice 3.** *Soit $\alpha : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par*

$$\alpha(x, y, z, t) = (2x - y, x + y + z + t, 3y - 2z + x - t).$$

*a) Déterminer la matrice de $\alpha$ par rapport aux bases canoniques de $\mathbb{R}^4$ et de $\mathbb{R}^3$.*

*b) Quelle est le vecteur colonne de $\alpha(0, 1, 0, 0)$ par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^3$?*

*c) Montrer que $F = ((-1, 0, 0, 1), (0, 4, 0, 1), (0, 0, 3, 1), (0, 0, 0, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^4$.*

*d) Déterminer le vecteur colonne de $v = (1, 4, 3, -1)$ par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^4$?*

*e) Déterminer le vecteur colonne de $v$ par rapport à la base $F$.*

**Exercice 4.** *Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(K)$.*

*(a) Montrer que si $ad - bc \neq 0$ alors $A$ est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.*

*(b) On considère l'application $\mathbb{C}$-linéaire $\phi : \mathbb{C}[t]_{\leq 1} \to M_{2\times 1}(\mathbb{C})$ définie par $\phi(f) = \begin{pmatrix} f(i) \\ f(0) \end{pmatrix}$. On pose les bases ordonnées suivantes des deux espaces vectoriels :*
*$B_1 = (1, t)$, $B_2 = (t - i, i)$, des bases de $\mathbb{C}[t]_{\leq 1}$ et*
*$C_1 = (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix})$, et $C_2 = (\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix})$, des bases de $M_{2\times 1}(\mathbb{C})$.*
*Trouver les matrices de passage suivantes :*
$(\mathrm{id})^{B_2}_{B_1}$, $(\mathrm{id})^{B_1}_{B_2}$, $(\mathrm{id})^{C_2}_{C_1}$, $(\mathrm{id})^{C_1}_{C_2}$.

(c) *Trouver les matrices de $\phi$ par rapport aux differents choix des bases, comme suit :*
$(\phi)_{B_1}^{C_1}$, $(\phi)_{B_1}^{C_2}$, *et* $(\phi)_{B_2}^{C_2}$.

**Exercice 5.** *Soit $\mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leq 2$ à coefficients dans $\mathbb{R}$. Soient $E = (1, t, t^2)$ la base ordonnée de $\mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ et $F = (1 + t, t + t^2, t^2)$. Soit $\alpha : \mathbb{R}[t]_{\leq 2} \to \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ l'application $\mathbb{R}$-linéaire définie par $\alpha(a + bt + ct^2) = b + 2ct$ pour tous $a, b, c \in \mathbb{R}$.*

a) *Montrer que $F$ est une base de $\mathbb{R}[t]_{\leq 2}$.*

b) *Trouver les matrices de changement de base $(\mathrm{id})_E^F$ et $(\mathrm{id})_F^E$.*

c) *Déterminer $(\alpha)_E^E$.*

d) *Déterminer $(\alpha)_F^F$.*

**Exercice 6** (Cet exercice complète la preuve d'une des propriétés de la multiplication des matrices)**.** *Soient $A, B \in M_{r\times s}(K)$ et soit $C \in M_{s\times \ell}(K)$. Montrer que $(A + B)C = AC + BC$.*

**Exercice 7** (Cet exercice complète la preuve du 5.3.3 des notes du cours)**.** *Soient $V$ et $W$ des $K$-espaces vectoriels de dimension finie avec bases ordonnées respectives $B_V$ et $B_W$. Soient $\phi, \psi \in \mathcal{L}(V, W)$. Montrer que $(\phi + \psi)_{B_V}^{B_W} = (\phi)_{B_V}^{B_W} + (\psi)_{B_V}^{B_W}$ et que pour tout $\lambda \in K$ on a que $(\lambda\phi)_{B_V}^{B_W} = \lambda \cdot (\phi)_{B_V}^{B_W}$.*

**Exercice 8.** *Soit $K$ un corps. Démontrer qu'une matrice $A \in M_n(K)$ est scalaire si et seulement si $A$ commute avec toutes les matrices de $M_n(K)$.*
Indication : Faire commuter $A$ avec chacune des matrices $E_{rs}$ de la base usuelle de $M_n(K)$.

**Exercice 9.** (†) *Soit $V$ un espace vectoriel de dimension finie $m$ sur un corps $K$ et $\phi : V \longrightarrow V$ une application linéaire.*

a) *Démontrer qu'il existe un nombre $1 \leq n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{Ker}\,(\phi^{k-1}) = \mathrm{Ker}\,(\phi^k)$ pour tout $k \geq n$.*

b) *Formuler et démontrer une affirmation similaire pour les images de $\phi^k$, $k \in \mathbb{N}$.*

c) *Montrer par un exemple que l'affirmation a) devient fausse sans l'hypothèse que $\dim(V) < \infty$.*

d) *Donner un exemple d'un espace vectoriel de dimension infinie et d'une application linéaire $\phi : V \longrightarrow V$ telle que $\phi$ soit surjective, mais pas bijective.*

**Exercice 10.** (†) *Soit $K$ un corps et $\alpha$, $\beta : K^n \longrightarrow K^n$ deux applications linéaires. Démontrer l'inégalité:*

$$\mathrm{rang}\,(\alpha) + \mathrm{rang}\,(\beta) - n \leq \mathrm{rang}\,(\alpha \circ \beta) \leq \min\{\mathrm{rang}\,(\alpha), \mathrm{rang}\,(\beta)\}.$$

**Exercice 11** (Facultatif)**.** *Soit $V$ un $K$-espace vectoriel de dimension finie et soit $W \subseteq V$ un sous-espace vectoriel. Posons $H = \{\theta \in \mathrm{GL}(V) \mid \theta(W) \subseteq W\}$ (on l'appelle* le stabilisateur dans $GL(V)$ de $W$*). Montrer que $H$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(V)$. (On rappelle que la loi de composition dans le groupe $\mathrm{GL}(V)$ est la composition d'applications.)*