
Série 8

5 novembre

Notation: Soit p un nombre premier. On note $\mathbb{F}_p$ le corps fini à p éléments et écrira simplement a pour $\bar{a}$, pour un élément $\bar{a}$ de $\mathbb{F}_p$.
On fixe un corps K.
On écrira $M_n(K)$ pour $M_{n\times n}(K)$.

A cette série, vous pouvez rendre pour correction l'exercice 5. Il faut le donner à un des assistants de votre salle d'exercices au plus tard lors de la séance d'exercices du 12 novembre.

Exercice 1. *Démontrer que si V est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n, alors la dimension de V en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel est égale à $2n$. (Voir l'exercice 8 de la série 5).*

Exercice 2. *Soit $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par $\varphi(x, y, z) = (4x + 2y, x + y + z)$.*

a) Montrer que φ est une application $\mathbb{R}$-linéaire.

b) Déterminer $\operatorname{Ker}(\varphi)$ ainsi que sa dimension.

c) L'application φ est-elle injective?

d) Déterminer le rang de φ.

e) L'application φ est-elle surjective?

Exercice 3. *Soit $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$, pour V et W des K-espaces vectoriels. Soit B une base de V. Montrer que si φ est injective, alors l'ensemble $S = \{\varphi(v) \mid v \in B\}$ est une base de $\operatorname{Im}(\varphi)$.*

Exercice 4. *Soit $\mathbb{R}[t]_{\leq n}$ l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus n, à coefficients dans $\mathbb{R}$. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, considérons l'application $\phi_a : \mathbb{R}[t]_{\leq n} \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $\phi(P(t)) = P(a)$.*

a) Montrer que l'application ϕ_a est $\mathbb{R}$-linéaire pour tout $a \in \mathbb{R}$.

b) Trouver la dimension du noyau et de l'image de ϕ_a.

c) Construire une application $\mathbb{R}$-linéaire et bijective $\psi_a : \mathbb{R}[t]_{\leq n-1} \longrightarrow \operatorname{Ker}(\phi_a)$. Utiliser cette application pour donner une base de $\operatorname{Ker}(\phi_a)$.

Exercice 5. *Soient K un corps et $n \geq 1$ un entier positif. Soit $\operatorname{Tr} : M_n(K) \to K$ l'application trace définie par $\operatorname{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n A_{ii}$ pour toute $A = (A_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(K)$.*

a) Montrer que Tr est une application K-linéaire surjective et déduire la dimension du noyau. (Voir l'exercice 6 de la série 5.)

b) Montrer que $\operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA)$ pour toutes $A, B \in M_n(K)$.

c) Montrer que $\operatorname{Tr}(S^{-1}AS) = \operatorname{Tr}(A)$ pour $A, S \in M_n(K)$ et S une matrice inversible.

Exercice 6. *Soient V un K-espace vectoriel et $\varphi : V \to V$ une application K-linéaire. On suppose que*

$$(a)\ \dim(V) = 8, \qquad (b)\ \dim(\operatorname{Im}(\varphi)) = 4, \qquad (c)\ \varphi \circ \varphi = 0.$$

Montrer que $\operatorname{Im}(\varphi) = \operatorname{Ker}(\varphi)$.

Exercice 7. ($\star$) *Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ fixé. Soit $\varphi : \mathbb{C}^3 \to M_2(\mathbb{C})$ l'application définie par*

$$\varphi(x, y, z) = \begin{pmatrix} ix + y + \lambda z & x - iy + iz \\ 0 & (\lambda + 1)z \end{pmatrix}$$

pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$.

a) *Montrer que φ est une application $\mathbb{C}$-linéaire.*

b) *Trouver une base du noyau de φ.*

c) *Déterminer la dimension du noyau de φ.*

d) *Déterminer la dimension de l'image de φ.*

Exercice 8. *Soient K un corps, V un K-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, W un K-espace vectoriel de dimension $m \geq 1$ et $\varphi : V \to W$ une application K-linéaire.*

a) *Montrer que si $n > m$, φ n'est pas injective.*

b) *Montrer que si $n < m$, φ n'est pas surjective.*

c) *En déduire une condition nécessaire sur n et m pour que φ soit bijective.*

d) *La condition obtenue dans c) est-elle suffisante?*

Exercice 9. *Un K-espace vectoriel V est dit* **décomposable** *s'il existe deux sous-espaces V_1 et V_2 tels que*

$$V = V_1 \oplus V_2, \qquad \textit{avec} \qquad V_1 \neq \{0\}, \quad V_2 \neq \{0\}.$$

L'espace V est dit **indécomposable** *si $V \neq \{0\}$ et V n'est pas décomposable.*

a) *Démontrer que si V est de dimension finie, alors V est indécomposable si et seulement si $\dim(V) = 1$.*

b) *Une application linéaire $e : V \longrightarrow V$ est appelée un* **projecteur** *si $e^2 = e$ (où e^2 désigne la composée $e^2 = e \circ e$). Démontrer que, si e est un projecteur, alors $V = \operatorname{Ker}(e) \oplus \operatorname{Im}(e)$.*

c) *Montrer que s'il existe un projecteur $e : V \longrightarrow V$ non trivial (c'est-à-dire $e \neq 0$ et $e \neq \operatorname{id}_V$), alors V est décomposable.*

d) *Réciproquement, montrer que, si V est décomposable, il existe deux projecteurs e_1 et e_2 tels que:*

   1) $e_1 + e_2 = \operatorname{id}_V$.
   2) $e_1 \circ e_2 = 0$ *et* $e_2 \circ e_1 = 0$.

Exercice 10. *Effectuer tous les produits possibles de deux matrices parmi les matrices suivantes:*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 4 & -3 & 7 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 3 & 0 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 6 \\ 9 & 3 & -2 \\ -3 & 8 & 11 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -9 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} -6 & -11 & 5 \end{pmatrix}.$$

Exercice 11. *Soient A et B deux matrices à coefficients dans un corps K. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont correctes?*

a) *Si A et B sont inversibles, alors AB l'est aussi.*

b) *Si AB est inversible, alors A et B le sont aussi.*

c) *Les produits des matrices A et A^t, dans les deux sens, sont toujours définis. Les matrices résultantes sont carrées et de même taille.*

d) *Si les deux produits matriciels AB et BA sont définis, alors A et B sont des matrices carrées de même taille.*

e) *Si les deux produits matriciels AB et BA sont définis et si $AB = 0$, alors $BA = 0$.*

f) *Si A et B sont carrées de même taille, alors $(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$.*

Exercice 12. *Considérons l'ensemble $\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\}$. Démontrer que $\mathcal{M}$, muni de l'addition et de la multiplication des matrices, est un corps isomorphe à $\mathbb{C}$. Pour établir ce fait, il suffit de montrer l'existence d'un morphisme d'anneaux de $\mathbb{C}$ dans $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ avec image $\mathcal{M}$.*

Exercice 13 (Facultatif). *On considère* $\mathbb{R}$ *comme* $\mathbb{Q}$*-espace vectoriel (voir exercice 10 de la série 6). Montrer que* $\mathbb{R}$ *est de dimension infinie. (On admet que* $\mathbb{R}$ *n'est pas dénombrable et que* $\mathbb{Q}$ *est dénombrable.)*

Exercice 14 (Facultatif). *Déterminer tous les sous-espaces vectoriels du* K*-espace vectoriel* $K^2 = \{(x, y) \mid x, y \in K\}$ *pour* $K = \mathbb{F}_2$ *et* $K = \mathbb{F}_3$.

Exercice 15 (Facultatif). *Soient* U *et* W *des sous-espaces vectoriels d'un* K*-espace vectoriel* V. *On définit une loi de composition* $+$ *sur le produit cartésien* $U \times W$ *et une loi externe* $\cdot : K \times (U \times W) \to U \times W$ *comme suit :*

$$(u, w) + (u', w') = (u + u', w + w'), \text{ pour tous } u, u' \in U, w, w' \in W$$

et

$$\lambda \cdot (u, w) = (\lambda u, \lambda w), \text{ pour tout } \lambda \in K, u \in U, w \in W.$$

Montrer que $U \times W$ *est un* K*-espace vectoriel.*