
Série 7

29 octobre

Notation: Soit p un nombre premier. On note $\mathbb{F}_p$ le corps fini à p éléments et écrira simplement a pour $\bar{a}$, pour un élément $\bar{a}$ de $\mathbb{F}_p$.
On fixe un corps K.
On écrira $M_n(K)$ pour $M_{n\times n}(K)$.

A cette série, vous pouvez rendre pour correction l'exercice 2. Il faut le donner à un des assistants de votre salle d'exercices au plus tard lors de la séance d'exercices du 5 novembre.

A cette série il y a deux exercices notés avec $\star$. Ils sont en plus car ils ressemblent à d'autres exercices. Vous pouvez éventuellement les garder pour la période des révisions

---

Exercice 1. *On considère les sous-espaces vectoriels suivants de $X = M_{2\times 3}(\mathbb{C})$:*

$$U = \{\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \in X \mid a-b = c-d \text{ et } e+f=0\},$$

$$V = \text{Vect}\,\Big(\begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i+1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2+i & 0 & 2+i \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\Big).$$

a) *Calculer* $\dim(U)$ *et* $\dim(V)$.

b) *Trouver* $\dim(U \cap V)$.

c) *Montrer que* $U + V = M_{2\times 3}(\mathbb{C})$.

Exercice 2. *Soit $V = \mathbb{R}[t]_{\leq 3}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel de polynômes à coefficients réels de degré au plus* 3.

(a) *Vérifier que $B = \{1-t, t+t^2, 3t-3t^2+t^3, 1-t^2\}$ est une base de V.*

(b) *Trouver les coordonnées de chacun des vecteurs suivants par rapport à la base B :*
$p_1 = 1$, $p_2 = t$, $p_3 = t^2$, $p_4 = t^3$, *et* $p_5 = a + bt + ct^2 + dt^3$, *pour* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Exercice 3. *Soit $V = M_{2\times 3}(\mathbb{F}_2)$.*

(a) *Montrer que* $\text{Card}(V) = 64$.

(b) (facultatif, un peu plus difficile) *Soit $X \subset V$. Montrer que si X possède plus que* 32 *éléments, alors* $\text{Vect}\,(X) = V$.

(c) *Déterminer si* $\{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\}$ *est une famille génératrice de V.*

(d) *Déterminer si* $\{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\}$ *est une famille libre dans V.*

Exercice 4. *Pour chacun des espaces vectoriels suivants, trouver une base et donner la dimension.*

a) *Le $\mathbb{C}$-espace vectoriel T des matrices $A = (A_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(\mathbb{C})$ telles que $A_{ij} = A_{ji}$ pour tous $i \neq j$,*

b) *Le K-espace vectoriel des polynômes $p(t) \in K[t]$ de degré ≤ 3 qui s'annulent en* 0 *et* 1.

c) *Le $\mathbb{F}_7$-espace vectoriel* $V = \{(x, y, z) \in (\mathbb{F}_7)^3 \mid x + y + 2z = 0 \text{ et } 3y + z = 0\}$.

Exercice 5. $(\star)$ *On considère les sous-espaces vectoriels suivants de $\mathbb{R}^4$:*

$$U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 2z + t = 0 \quad \text{et} \quad z + 3t = 0\},$$

$$V = \text{Vect}\,\big((1,0,0,0),\ (0,-1,0,0),\ (-1,1,0,0),\ (0,0,0,1)\big).$$

a) *Calculer* $\dim(U)$ *et* $\dim(V)$.

b) *Montrer que* $U + V = \mathbb{R}^4$.

c) *Trouver* $\dim(U \cap V)$ *sans déterminer* $U \cap V$.

d) *Déterminer* $U \cap V$.

Exercice 6. *Soit V un K-espace vectoriel de dimension 5. Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont correctes?*

a) *Une partie à 6 éléments est toujours génératrice.*

b) *Soient U et W deux sous-espaces vectoriels de V tels que* $\dim(U) = 3$ *et* $\dim(W) = 2$. *Si* $U \cap W = \{0\}$, *alors* $V = U \oplus W$.

c) *Pour deux sous-espaces vectoriels U et W de V avec* $\dim(U) = 3$ *et* $\dim(W) = 4$, *on a* $\dim(U \cap W) = 2$.

d) *Une partie à 4 éléments est toujours libre.*

Exercice 7. ($\star$) *Soit V un K-espace vectoriel de dimension 4. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont correctes?*

a) *Si* $\{v_1, v_2\}$ *et* $\{v_3, v_4\}$ *sont linéairement indépendants, alors* $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ *le sont aussi.*

b) *Si U et W sont des sous-espaces vectoriels de dimension 2 de V tels que* $V = U + W$, *alors* $U \cap W = \{0_V\}$.

c) *Il existe un sous-ensemble* $S \subset V$, *composé de 4 éléments linéairement indépendants, mais qui ne forme pas une base de V.*

d) *Si* $K = \mathbb{F}_5$, *alors V possède au moins 10 vecteurs distincts et au plus 100 vecteurs distincts.*

Exercice 8.

Soit $p, q \in \mathbb{C}$ *et considérons les vecteurs* $u = (p, 0, p - q)$, $v = (0, p, q)$ *et* $w = (1, p, p) \in \mathbb{C}^3$. *Laquelle des affirmations suivantes est vraie?*

- *Les vecteurs u, v, w sont linéairement dépendants si et seulement si* $p = 0$.
- *Les vecteurs u, v, w sont linéairement dépendants si et seulement si* $p = q$.
- *Les vecteurs u, v, w sont linéairement indépendants si* $p \notin \{0, 1\}$ *et* $q = \mathrm{i}p$.

Exercice 9. *Les applications suivantes sont-elles $\mathbb{R}$-linéaires?*

a) $\alpha_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad \alpha_1(x, y, z) = (x + 2y - z, 2z + \lambda)$, *où* $\lambda \in \mathbb{R}$ *est fixé.*

b) $\alpha_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \alpha_2(x, y) = (0, xy)$;

c) $\alpha_3 : \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad \alpha_3(f) = f(a) + \int_a^b f(x)dx$, *où* $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ *est l'ensemble des fonctions continues de* $[a, b]$ *dans* $\mathbb{R}$.

d) $\alpha_4 : \mathbb{R}[t]_{\leq 4} \to \mathbb{R}[t]_{\leq 4}, \quad \alpha_4(p(t)) = p(t + 1) - p(t)$.

Exercice 10 (Vérifications d'un résultat du cours)**.** *Soient V et W des K-espaces vectoriels et soient* $\phi : V \to W$ *et* $\psi : V \to W$ *des applications K-linéaires.*

(a) *Montrer que* $\phi + \psi$ *est une application K-linéaire.*

(b) *Soit* $\lambda \in K$. *Montrer que* $\lambda\phi$ *est une application K-linéaire.*

Exercice 11 (Vérification d'un exemple du cours)**.** *Soit* $\varphi : K[t] \to K[t]$ *l'application définie par* $\varphi(p(t)) = p(t^2)$, *c'est-à-dire qu'on a*

$$\varphi(a_0 + \cdots + a_m t^m) = a_0 + a_1 t^2 + \cdots + a_m t^{2m}.$$

Montrer que φ est une application K-linéaire.

Exercice 12 (Vérification d'un exemple du cours)**.** *Soit* $m \in \mathbb{R}$. *On considère l'application* $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, *la projection orthogonale sur la droite* $D: \ y = mx$. *Montrer que* $\pi(a, b) = (\frac{a+mb}{m^2+1}, \frac{ma+m^2b}{m^2+1})$ *pour tous* $a, b \in \mathbb{R}$.

Exercice 13 (Facultatif). *Soit V un K-espace vectoriel avec sous-espaces vectoriels U et W tels que $V = U \oplus W$. On définit une application linéaire $\theta : V \to U$ par $\theta(x + y) = x$, où $x \in U, y \in W$. On note que cette application est bien définie car tout élément de V s'écrit de façon unique comme une somme d'un élément de U et un élément de W.*

a) Montrer que θ est une application K-linéaire.

b) Déterminer $\ker(\theta)$.

c) Déterminer $\mathrm{Im}\,(\theta)$.

d) Montrer que $\theta \circ \theta = \theta$.

On appelle θ la projection sur U le long de W.

Exercice 14 (Facultatif). *On rappelle que pour V un K-espace vectoriel avec sous-espaces vectoriels V_1 et V_2 qui sont les deux de dimension finie, on a* $\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$. *Trouver un exemple qui montre que pour trois sous-espaces V_1, V_2, V_3 (de dimension finie) de V, la formule*

$$\dim(V_1 + V_2 + V_3) = \dim V_1 + \dim V_2 + \dim V_3 - \dim(V_1 \cap V_2 \cap V_3)$$

n'est pas valable.