Série 6

15 octobre

Notation: Soit p un nombre premier. On note $\mathbb{F}_p$ le corps fini à p éléments et écrira simplement a pour $\bar{a}$, pour un élément $\bar{a}$ de $\mathbb{F}_p$. On fixe un corps K. On écrira $M_n(K)$ pour $M_{n\times n}(K)$.

A cette série, vous pouvez rendre pour correction l'exercice 2. Il faut le donner à un des assistants de votre salle d'exercices au plus tard lors de la séance d'exercices du 29 octobre.

Exercice 1. *Soit V un K-espace vectoriel avec base $B = \{f_1, \dots, f_m\}$. Démontrer que $V = \mathrm{Vect}\,(f_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Vect}\,(f_m)$.*

Exercice 2. *Soit λ un nombre réel fixé. Dans $\mathbb{R}[t]$, on considère la famille de polynômes*

$$F = \{(\lambda^2 - 4)t^3 + t^2,\ t - \lambda,\ (\lambda - 2)t^3,\ \lambda\}$$

a) Pour quelles valeurs de λ cette famille est-elle libre dans $\mathbb{R}[t]$?

b) Pour quelles valeurs de λ cette famille est-elle une partie génératrice de $\mathbb{R}[t]_{\leq 3}$?

c) Pour quelles valeurs de λ cette famille est-elle une base de $\mathbb{R}[t]_{\leq 3}$?

Exercice 3. *a) Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{C}$, la famille*

$$\mathcal{A} = \{(a, i, a^2),\ (0, a-1, 1),\ (0, 0, 1)\}$$

est-elle une famille libre dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^3$?

b) Pour une des valeurs trouvées dans a) (au choix), exprimer le vecteur $(1, i, -i)$ comme combinaison linéaire des vecteurs de la famille $\mathcal{A}$.

Exercice 4. *Soient $v = (a, b), w = (c, d)$ des vecteurs dans K^2. Montrer que $\{v, w\}$ est un ensemble de vecteurs linéairement dépendents si et seulement si $ad - bc = 0$.*

Exercice 5. *Pour chaque sous-espace vectoriel W de l'espace vectoriel V donné, trouver une famille génératrice de cardinalité 3, et une autre de cardinalité 4.*

(a) $V = \mathbb{F}_5^5$, $W = \{(a, b, c, d, e) \in V \mid a + b = c + d, a + 2c = 0, 2c + b + 4d = 0\}$

(b) $V = \mathbb{R}[t]$, $W = \{f \in V \mid \deg(f) \leq 3, f(1) = 0 = f(-1)\}$

Exercice 6. *On considère l'ensemble $E = \{f_1, f_2, \dots, f_5\}$ de vecteurs dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, où $f_1(x) = 1, f_2(x) = \sin(x), f_3(x) = \cos(x), f_4(x) = \sin^2(x)$ et $f_5(x) = \cos^2(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que E est un ensemble de vecteurs linéairement dépendants. Ensuite, montrer que $E \setminus \{\cos^2(x)\}$ est une famille libre.*

Exercice 7. *Trouver une famille de vecteurs $\{A, B, C\} \subset M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ telle que $\{A, B\}$, $\{B, C\}$ et $\{A, C\}$ sont des parties libres mais que les matrices A, B, C sont linéairement dépendantes.*

Exercice 8. *Soit V un K-espace vectoriel. Soient v_1, v_2, v_3 trois éléments de V. Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont correctes?*

a) Si la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est libre, alors $\{v_1, v_3\}$ est libre.

b) Si la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est libre, alors elle est aussi génératrice.

c) Les éléments v_1 et v_2 sont linéairement dépendants si et seulement si v_1 est un multiple de v_2.

d) Si $K = \mathbb{F}_5$, alors $\mathrm{Vect}\,(v_1, v_2) = \mathrm{Vect}\,(v_1 + 3v_2,\ 2v_1 + v_2)$.

e) $\mathrm{Vect}\,(v_1, v_2) = \mathrm{Vect}\,(v_1 + 2v_2, v_2)$.

f) Si la partie $\{v_1, v_2\}$ est libre, alors il en est de même pour la partie $\{v_1 + 2v_2, v_2\}$.

g) Si la partie $\{v_1, v_2\}$ est liée, alors il en est de même pour la partie $\{v_1 + 2v_2, v_2\}$.

Exercice 9. *a) Soient v_1, v_2 deux vecteurs d'un $\mathbb{F}_3$-espace vectoriel. On définit trois sous-espaces $V_1 = \mathrm{Vect}\,(v_1, v_2)$, $V_2 = \mathrm{Vect}\,(v_1 + 2v_2, v_2)$ et $V_3 = \mathrm{Vect}\,(v_1 + 2v_2, 2v_1 + v_2)$. Montrer que $V_1 = V_2$ pour tout choix de vecteurs $v_1, v_2 \in V$. Est-ce que $V_3 = V_1$ pour tout choix de vecteurs $v_1, v_2 \in V$?*

b) Soient U et V deux sous-espaces vectoriels d'un K-espace vectoriel. Supposons que $U = \mathrm{Vect}\,(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ et $V = \mathrm{Vect}\,(v_1, v_2, \cdots, v_m)$. Trouver une partie génératrice pour $W = U + V$.

Exercice 10. *Soient F et K des corps avec $F \subset K$, où F et K possèdent les mêmes lois de composition et le même élément neutre pour la multiplication. On munit K d'une structure de F-espace vectoriel comme suit: Par la définition d'un corps, $(K, +)$ est un groupe abélien. La multiplication par les scalaires dans F est donnée par la multiplication usuelle dans le corps K.*

On admet que $F = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b, \in \mathbb{Q}\}$ est un corps et comme $\mathbb{Q} \subset F$, F est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel comme expliqué ci-dessus. Montrer que $\{1, \sqrt{2}\}$ est une partie libre de F (en tant que $\mathbb{Q}$-espace vectoriel). On remarque aussi que cette partie est une partie génératrice, et donc une base.

Trouver une autre partie libre et une autre partie génératrice de F en tant que $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.