
Série 5

8 octobre

Notation: Soit p un nombre premier. On note $\mathbb{F}_p$ le corps fini à p éléments et écrira simplement a pour $\bar{a}$, pour un élément $\bar{a}$ de $\mathbb{F}_p$.
On fixe un corps K.
On écrira $M_n(K)$ pour $M_{n\times n}(K)$.

A cette série, vous pouvez rendre pour correction l'exercice 7. Il faut le donner à un des assistants de votre salle d'exercices au plus tard lors de la séance d'exercices du 15 octobre.

Exercice 1. *Parmi les parties suivantes de $\mathbb{R}^4$, préciser lesquelles sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.*

a) $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 3x - y - 2z + 3t = 0\}$.

b) $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 3x - y - z = 0 \text{ et } z - t = 1\}$.

c) $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 - y^2 = 0\}$.

d) $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid (x, y, z, t) = (-a + b,\ 2a + 3b,\ -2a,\ -b) \text{ pour } a, b \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 2. *Soit $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ vers lui-même. Les sous-ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?*

a) L'ensemble des fonctions qui sont continues sur l'intervalle $]0, 1[$.

b) L'ensemble des fonctions qui s'annulent sur l'intervalle $[0, 1]$.

c) L'ensemble des fonctions continues valant 1 en 0.

d) L'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f(x + 2) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 3. *Soit V un K-espace vectoriel avec sous-espaces vectoriels $W_1, W_2 \subset V$.*

a) *Démontrer que $W_1 + W_2$ est un sous-espace vectoriel de V.*

b) *Démontrer que $W_1 \cap W_2$ est un sous-espace vectoriel de V.*

c) *Donner un exemple dans $V = \mathbb{R}^2$ de sous-espaces vectoriels W_1 et W_2 tels que $W_1 \cup W_2$ n'est pas un sous-espace vectoriel de V.*

d) *Donner un exemple dans $V = \mathbb{R}^2$ de sous-espaces vectoriels W_1 et W_2 tels que $W_1 \cup W_2$* **est** *un sous-espace vectoriel de V.*

e) *Donner un exemple dans $V = \mathbb{R}^3$ de trois sous-espaces vectoriels W_1, W_2, W_3 tels que le sous-espace $W_1 + W_2 + W_3$ n'est pas la somme directe des sous-espaces W_1, W_2, W_3.*

f) *Soient $W_1, \dots, W_r$ des sous-espaces vectoriels de V. Montrer que $W_1 + \cdots + W_r$ est un sous-espace vectoriel de V.*

Exercice 4. *(a) Dans le $\mathbb{F}_3$-espace vectoriel $M_{2\times 3}(\mathbb{F}_3)$, montrer que*

$$\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\right).$$

(b) Soit $V = \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$. Déterminer si le sous-espace vectoriel $W = \mathrm{Vect}\,(t^2 - 2, t^2 + t, 2t^2 + t + 2)$ est égal à V et pareil pour $U = \mathrm{Vect}\,(t^2 - 2, t^2 + t, 2t^2 + t - 2)$.

(c) Vrai ou faux : $\mathrm{Vect}\,(t^k \mid k \geq 1) = K[t]$.

Exercice 5. *Soient K un corps et $K[t]_{\leq d}$ l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus d à coefficients dans K. Soit $\lambda \in K$ fixé. Soient $U = K[t]_{\leq 2}$ et $V = \{b_1 t + \lambda b_3 t^3 + \lambda^2 b_4 t^4 \mid b_1, b_3, b_4 \in K\}$.*

a) Montrer que U et V sont des sous-espaces vectoriels de $K[t]_{\leq 4}$.

b) Calculer $U \cap V$, $U \cup V$ et $U + V$.

c) Montrer que $U \cup V$ n' est pas un sous-espace vectoriel de $K[t]_{\leq 4}$ sauf pour une valeur spécifique de λ (à trouver).

Exercice 6. *a) Une matrice $A = (A_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ est dite scalaire s'il existe $d \in \mathbb{C}$ tel que*

$$A_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j, \\ d & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Montrer que l'ensemble V des matrices scalaires est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{C})$.

b) On définit la trace d'une matrice $A = (A_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ par $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}$. Montrer que l'ensemble W des matrices de trace nulle est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{C})$.

c) Montrer que $M_n(\mathbb{C}) = V \oplus W$.

d) Considérons maintenant l'espace vectoriel $M_3(\mathbb{F}_3)$ et posons V le sous-espace vectoriel des matrices scalaires dans $M_3(\mathbb{F}_3)$ et W le sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{F}_3)$ des matrices à traces nulles. (On admet que ces deux sous-ensembles sont des sous-espaces. Les preuves données pour (a) et (b) ne dépendent pas du corps $\mathbb{C}$.) Montrer que $M_3(\mathbb{F}_3) \neq V \oplus W$.

Exercice 7. *Soit $V = U \oplus W$ une somme directe de K-espaces vectoriels avec $W = \mathrm{Vect}\,(w)$, où $w \in W$ est non nul.*

a) Pour chaque $y \in U$, posons $W_y = \mathrm{Vect}\,(y + w)$. Montrer que W_y est un supplémentaire de U dans V.

b) Soit $y' \in U$ et $W_{y'} = \mathrm{Vect}\,(y' + w)$. Montrer que $W_y = W_{y'}$ si et seulement si $y = y'$. (Cela montre que tous les W_y sont différents (lorsque y varie dans U) donc qu'il y a beaucoup de supplémentaires de U dans V.)

Exercice 8. *Soit $K_1 \subset K_2$ deux corps avec les mêmes opérations d'addition et de multiplication. Soit V un K_2-espace vectoriel. On a l'application $f : K_2 \times V \to V$ qui définit la multiplication par scalaire, $f(\alpha, v) = \alpha v$. Montrer que V est aussi un K_1-espace vectoriel où on prend l'addition déjà donnée et avec la multiplication par scalaire donnée par $K_1 \times V \to V$, $(\beta, v) \mapsto f(\beta, v) = \beta v$, c'est-à-dire que l'on restreint la multiplication par scalaire au plus petit corps K_1.*

Exercice 9. *Soit $X = \{\begin{pmatrix} a & ib \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, b, d \in \mathbb{R}\} \subset M_{2\times 2}(\mathbb{C})$. On définit l'addition usuelle des éléments de X (vus comme des éléments du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $M_{2\times 2}(\mathbb{C})$).*

(a) *Montrer que X n'est pas un sous-espace vectoriel de $M_{2\times 2}(\mathbb{C})$.*

(b) *Comme dans l'exercice précédent, $M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Montrer que X est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $M_{2\times 2}(\mathbb{C})$.*

La matière des deux exercices suivants sera reprise, utilisée et élaborée dans vos cours d'analyse et de physique. La formule de Moivre sera éventuellement utile aussi dans la résolution d'équations polynomiales dans le cours d'algèbre linéaire avancée II. Par contre, nous n'en aurons pas besoin ce semestre.

Exercice 10. *On considère le point $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. En notant $r = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$, la longueur du segment entre $(0,0)$ et le point (x, y), et $\theta = \arctan \frac{y}{x} \in]-\pi, \pi]$ l'angle entre l'axe des abscisses positives et le vecteur associé au point (x, y), on peut écrire*

$$(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta).$$

Ainsi, on a

$$z = x + \mathrm{i}y = r\cos\theta + \mathrm{i}r\sin\theta = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta),$$

où θ est défini à $2k\pi$ près avec $k \in \mathbb{Z}$. On l'appelle la forme polaire *de z. L'angle $\theta = \mathsf{Arg}(z)$ est l'argument de z.*

Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ *deux nombres complexes, avec* $|z_i| = \rho_i$ *et* $\mathsf{Arg}(z_i) = \varphi_i$ *pour* $i = 1, 2$.

(a) Montrer que $|z_1 z_2| = \rho_1 \rho_2$.

(b) Montrer (en utilisant les identités trigonométriques) que $\mathsf{Arg}(z_1 z_2) = \mathsf{Arg}(z_1) + \mathsf{A}rg(z_2)$, *c'est-à-dire que*

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \rho_1(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1)\cdot\rho_2(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2) \\ &= \rho_1\rho_2\big(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1+\varphi_2)\big). \end{aligned} \tag{1}$$

Remarque

La récurrence sur n peut être utilisée pour établir la *Formule de Moivre*: Pour tous $r > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\big(r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)\big)^n = r^n\big(\cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta)\big).$$

Exercice 11. *La* fonction exponentielle complexe *permet de faire une représentation plus compacte des nombres complexes.*

Définition

Pour $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ *on définit*

$$e^z = \exp(z) := e^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y)$$

où e^x *est la fonction exponentielle réelle usuelle.*

Montrer que $e^{w+z} = e^w \cdot e^z$ *pour tous* $w, z \in \mathbb{C}$