Corrigé 4

1 octobre

A cette série, vous pouvez rendre pour correction l'exercice 5. Il faut le donner à un des assistants de votre salle d'exercices au plus tard lors de la séance d'exercices du 8 octobre.

Exercice 1. *Soit $z \in \mathbb{C}$, $z = x + y\mathrm{i}$, pour $x, y \in \mathbb{R}$. On définit le conjugué complexe de z, noté $\bar{z}$, comme suit : $\bar{z} = x - y\mathrm{i}$. Montrer que l'application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ donnée par $f(z) = \bar{z}$ est un homomorphisme d'anneaux.*

Exercice 2. *Soit $z \in \mathbb{C}$, $z = x + y\mathrm{i}$, pour $x, y \in \mathbb{R}$. On définit le module de z, un nombre réel, noté $|z|$ par $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}$. Vérifier les propriétés suivantes :*

(a) $z\bar{z} = |z|^2$

(b) Pour $z \neq 0$, on a $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.

(c) Pour $z \neq 0$, on a $\overline{z^{-1}} = \bar{z}^{-1}$.

(d) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

Exercice 3. *Utiliser l'exercice 1. pour montrer que si $z \in \mathbb{C}$ est une racine du polynôme $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ alors $\bar{z}$ est aussi une racine de p.*

Exercice 4. *Soit z une variable. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante:*

$$\frac{z - 3i}{2z + 1} = \frac{4 + 3i}{2 - i}$$

Exercice 5. *(a) Soit $\phi : \mathbb{R}[t] \to \mathbb{C}$ l'application d'évaluation en i, c'est-à-dire que pour tout $p \in \mathbb{R}[t]$, $\phi(p) = p(\mathrm{i})$. On admet que ϕ est un morphisme d'anneaux et en particulier un morphisme de groupes de $(\mathbb{R}[t], +)$ dans $(\mathbb{C}, +)$. Trouver le sous-groupe* $\ker(\phi)$

(b) Soit $e_{\mathrm{i}} : \mathbb{C}[t] \to \mathbb{C}$ l'application d'évaluation en i. Trouver $\ker(e_{\mathrm{i}})$.

Exercice 6. *Vérifier que pour tout $\bar{c} \in \mathbb{F}_3$ on a $\bar{c}^3 - \bar{c} = \bar{0}$, et de même que dans $\mathbb{F}_5$ on a $\bar{b}^5 - \bar{b} = \bar{0}$ pour tout $\bar{b} \in \mathbb{F}_5$. Montrer que le polynôme $t^3 - t \in \mathbb{F}_3[t]$ est scindé et que le polynôme $t^5 - t \in \mathbb{F}_5[t]$ est scindé.*

Exercice 7. *Dans chacun des cas suivants, l'ensemble V est-il un K-espace vectoriel pour la loi évidente d'addition et la multiplication scalaire donnée?*

a) $K = \mathbb{C}$, $V = \mathbb{C}^2$ *et* $\lambda(x, y) = (\mathrm{Re}(\lambda)x, \mathrm{Re}(\lambda)y)$ *pour* $\lambda \in \mathbb{C}$ *et* $(x, y) \in V$.

b) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$ *et* $\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda^2 y)$ *pour* $\lambda \in \mathbb{R}$ *et* $(x, y) \in V$.

c) $K = \mathbb{F}_2$, $V = \mathbb{F}_2^2$ *et* $\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda^2 y)$ *pour* $\lambda \in \mathbb{F}_2$ *et* $(x, y) \in V$.

d) $K = \mathbb{R}$, $V = \{f \in \mathbb{R}[t] \mid f(a) = 0\}$ *pour $a \in \mathbb{R}$ fixé et la multiplication scalaire au sens usuel.*

e) $K = \mathbb{R}$, $V = \{f \in \mathbb{R}[t] \mid f(-a) = -f(a)\ \forall a \in \mathbb{R}\}$ *et la multiplication scalaire au sens usuel.*

Exercice 8. *Dans chacun des cas suivants, l'ensemble V est-il un K-espace vectoriel (pour les lois évidentes d'addition et de multiplication scalaire)?*

a) $K = \mathbb{R}$, $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(n) \geq 0,\ \forall\ n \in \mathbb{Z}\}$,

b) $K = \mathbb{R}$, $V = \{a + bt \in \mathbb{R}[t] \mid a, b \in \mathbb{R}\}$,

c) $K = \mathbb{C}$, $V = \{f \in \mathbb{C}[t] \mid f(0) \in \mathbb{R}\}$,

d) $K = \mathbb{R}$, $V = \{f \in \mathbb{C}[t] \mid f(0) \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 9. *On pose $\mathcal{A}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont la dérivée est définie sur $\mathbb{R}$, donc $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, l'anneau des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (comme défini en cours). Alors comme la somme de deux fonctions dérivables est dérivable, le produit de deux fonctions dérivables l'est aussi, et la fonction $f(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ est également dérivable, $\mathcal{A}$ est un anneau unitaire avec les lois de $+$ et $\cdot$ héritées de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On considère l'application $D : \mathcal{A} \to \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, donnée par $D(f) = f'$, c'est-à-dire, D est l'application qui associe à une fonction f sa dérivée.*

1. *Montrer que D est un homomorphisme de groupes du groupe $(\mathcal{A}, +)$ dans le groupe $(\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}), +)$.*
2. *Montrer que D n'est pas un homomorphisme d'anneaux entre les anneaux $(\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}), +, \cdot)$ et $(\mathcal{A}, +, \cdot)$.*

Exercice 10 (Facultatif)**.** *Soient $d, n \in \mathbb{Z}$ avec $d \geq 1$ et $n \geq 1$ où d est un diviseur de n (c'est-à-dire que n est un multiple entier de d). Pour cet exercice on ecrira $\bar{a}$ pour un élément de $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ et $[b]$ pour un élément de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, pour bien distinguer à quel ensemble chaque élément appartient. Montrer que l'application*

$$f : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, \text{ donnée par } f([b]) = \bar{b}$$

est bien définie. Ensuite, montrer que f est un morphisme d'anneaux.

Exercice 11 (Facultatif)**.** *On définit une loi de composition $*$ sur l'ensemble $E = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ comme suit : pour tout $x, y \in E$ on a $x * y = |x|y$.*

(i) *Montrer que $*$ est associative.*

(ii) *Montrer qu'il existe un élément neutre e à gauche pour $*$, c'est-à-dire qu'il existe $e \in E$ tel que $e * b = b$ pour tout $b \in E$.*

(iii) *Montrer qu'il n'existe aucun élément neutre à droite.*

(iv) *Montrer que tout élément $a \in E$ possède un inverse à droite, c'est-à-dire qu'il existe $a' \in E$ tel que $a * a' = e$, où e est l'élément neutre à gauche trouvé dans (ii).*

On remarque donc que $(E, *)$ n'est pas un groupe et que l'existence d'une loi de composition associative, d'un élément neutre à gauche et des inverses à droite n'est pas suffisant pour définir une structure de groupe.