Corrigé 2

17 septembre 2024

A cette série, vous pouvez rendre pour correction l'exercice 3. Il faut le donner à un des assistants de votre salle d'exercices au plus tard lors de la séance d'exercices du 24 septembre.

Dans cette série et toutes les suivantes, on utilisera les deux notations $A \subset B$ et $A \subseteq B$ pour indiquer qu'une partie A est un sous-ensemble d'une partie B, c'est-à-dire que tout élément de la partie A appartient à la partie B.

Exercice 1. *Les ensembles suivants sont-ils stables pour la loi de composition indiquée? Justifier votre réponse.*

a) $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } n = 3k\}$ *pour la multiplication usuelle.*

b) $B = \{n \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } n = 3k+1\}$ *pour la multiplication usuelle.*

c) $C = \{n \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } n = 3k+2\}$ *pour la multiplication usuelle.*

d) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x = 3y\}$ *pour la loi de composition* $(x, y) + (a, b) = (x + a, y + b)$ *sur* $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2. *Soit* $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}) = \{\theta_{a,b} \mid a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$*, le groupe d'applications affines de* $\mathbb{R}$ *vu en cours. (On rappelle que pour* $x \in \mathbb{R}$*,* $\theta_{a,b}(x) = ax + b$ *et la loi de composition est la composition d'applications.) Compléter la vérification que* $\mathrm{Aff}(\mathbb{R})$ *est un groupe. Montrer que* $\mathrm{Aff}(\mathbb{R})$ *est non abélien.*

Exercice 3. *Soit* $(G, *)$ *un groupe. Fixons* $a \in G$ *et définissons l'application* $T_a : G \to G$ *(une translation) par* $T_a(g) = a * g$*, pour tout* $g \in G$*. Montrer que* T_a *est une application bijective, c'est-à-dire surjective et injective.*

Exercice 4. *Montrer que si* $n > 2$*, alors le groupe symétrique* S_n *n'est pas abélien.*

Exercice 5. *Soit* $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ *l'ensemble des entiers modulo* 6*. Pour* $a \in \mathbb{Z}$ *on notera par* $\bar{a} \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ *la classe d'équivalence de* a *modulo* 6*. On définit une loi de composition* $*$ *sur* $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ *par* $\bar{a} * \bar{b} = \overline{ab}$*, pour tout* $a, b \in \mathbb{Z}$*. (Ici* ab *est le produit usuel de* a *et* b *dans* $\mathbb{Z}$*.) On admet que la loi de composition* $*$ *est bien définie et associative.*

(a) Déterminer si $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, *)$ *est un groupe.*

(b) Trouver toutes les solutions de l'équation $x * x + x = \bar{0}$ *pour* $x \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$*.*

Exercice 6 (Cet exercice complète quelques preuves du cours.)**.** *Soient* $(G, *)$ *un groupe et* $a, a_1, \ldots, a_t \in G$*, avec inverses respectifs* $a^{-1}, a_1^{-1}, \ldots, a_t^{-1}$*.*

(a) Montrer que l'inverse de a *est unique.*

(b) Montrer que l'inverse de $a_1 * \cdots * a_t$ *est égal à* $(a_t^{-1} * \cdots * a_1^{-1})$*.*

(c) Montrer que l'inverse de a^{-1} *est égal à* a*.*

Exercice 7 (Facultatif)**.** *Soient* $(G_1, *)$ *et* $(G_2, \circ)$ *des groupes. On munit le produit cartésien* $G_1 \times G_2$ *d'une loi de composition* $\cdot$ *comme suit*

$$\cdot : (G_1 \times G_2) \times (G_1 \times G_2) \to G_1 \times G_2, \quad (a, b) \cdot (c, d) = (a * c, b \circ d), \text{ pour } a, c \in G_1, b, d \in G_2.$$

Montrer que $(G_1 \times G_2, \cdot)$ *est un groupe.*

Exercice 8 (Cet exercice est fastidieux et facultatif, mais vous donnerait encore un exercice de vérification des axiomes d'un groupe)**.** *Soit* S^1 *le cercle unité dans* $\mathbb{R}^2$*, i.e.* $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$*. On définit la loi de composition* $*$ *sur* $\mathbb{R}^2$ *par*

$$(a, b) * (c, d) = (ac - bd,\ ad + bc)$$

pour $a, b, c, d \in \mathbb{R}$*.*

a) Montrer que ceci définit une loi de composition associative et commutative sur $\mathbb{R}^2$*.*

b) Montrer que S^1 *est stable pour* $*$*.*

c) Trouver des expressions pour l'élément neutre, et pour l'inverse d'un élément quelconque $(a, b) \in S^1$*.*

d) Montrer que $(S^1, *)$ *est un groupe. Est-il commutatif?*