
Série 1

10 septembre 2024

A cette série, vous pouvez rendre pour correction l'exercice 4. Il faut le donner à un des assistants de votre salle d'exercices au plus tard lors de la séance d'exercices du 17 septembre.

Dans cette série et toutes les suivantes, on utilisera les deux notations $A \subset B$ et $A \subseteq B$ pour indiquer qu'une partie A est un sous-ensemble d'une partie B, c'est-à-dire que tout élément de la partie A appartient à la partie B.

Pour une relation R définie sur un ensemble X, on utilisera parfois la notation $x \sim y$ pour dire que $(x, y) \in R$.

Exercice 1. *Soient X et Y deux ensembles non vides et soit $f : X \to Y$ une application. On définit une relation binaire R sur X comme suit: $R = \{(x, y) \in X \times X \mid f(x) = f(y)\}$, c'est-à-dire que pour $x, y \in X$, on a que $x \sim y$ si et seulement si $f(x) = f(y)$. Montrer que R est une relation d'équivalence sur X. Aussi dans le cas particulier où $X = Y = \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec $x \mapsto x^2$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, trouver les classes d'équivalences de $\mathbb{R}$ relatives à cette relation.*

Exercice 2. (a) *Donner un exemple d'une relation sur un ensemble X qui est transitive et symétrique, mais non reflexive.*

(b) *Donner un exemple d'une relation sur un ensemble X qui est symétrique et reflexive, mais non transitive.*

Remarque : Pour les exercices suivants, vous devez faire référence au dossier "Préliminaires" où se trouvent toutes les notions nécessaires.

Exercice 3. *Soit $f : X \to Y$ une application avec X, Y non vides. Parmi les assertions suivantes lesquelles sont correctes?*

a) L'application f est injective s'il existe $x \neq x'$ dans X tels que $f(x) \neq f(x')$.

b) L'application f n'est pas injective s'il existe $x \neq x'$ dans X tels que $f(x) = f(x')$.

c) Si l'application f est injective, alors pour tout $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ est un ensemble à un élément.

d) L'application f est surjective si pour tout $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ n'est pas vide.

e) L'application f est bijective si pour tout $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ est un ensemble à un élément.

Exercice 4. *Soit $f : X \to Y$ une application d'un ensemble X dans un ensemble Y. Soient A et B deux sous-ensembles de X et C et D deux sous-ensembles de Y.*

a) Montrer que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

b) (i) Montrer que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

(ii) Trouver un exemple pour lequel $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$.

(iii) Montrer que si f est injective, alors $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

c) Montrer que $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.

d) Montrer que $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

Exercice 5. *Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application avec X et Y des ensembles non vides. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont correctes?*

a) f est surjective $\Longleftrightarrow \forall V \subset Y,\ f(f^{-1}(V)) = V$.

b) f est injective $\Longleftrightarrow \forall U \subset X,\ f^{-1}(f(U)) = U$.