
Série 13

10 décembre

Notation: Soit p un nombre premier. On note $\mathbb{F}_p$ le corps fini à p éléments et écrira simplement a pour $\bar{a}$, pour un élément $\bar{a}$ de $\mathbb{F}_p$.
On fixe un corps K.
On écrira $M_n(K)$ pour $M_{n\times n}(K)$.
Dans cette série et toutes les suivantes, on utilisera les deux notations $A \subset B$ et $A \subseteq B$ pour indiquer qu'une partie A est un sous-ensemble d'une partie B, c'est-à-dire que tout élément de la partie A appartient à la partie B.

Les exercices notés **($\star$)** sont "en plus" car ils ressemblent à d'autres exercices. Vous pouvez éventuellement les garder pour la période des révisions

---

L'exercice noté avec (†) est un peu plus difficile.

Exercice 1. *Dans chacun des cas suivants, calculer le polynôme caractéristique de $\alpha : V \to V$. Calculer la multiplicité algébrique et la multiplicité géométrique de chaque valeur propre de α.*

a) $V = \mathbb{R}^2, \quad \alpha(x,y) = (2x+y,\ -y)$.

b) $V = \mathbb{R}^2, \quad \alpha(x,y) = (x+y,\ -x+y)$.

c) $V = \mathbb{C}^2, \quad \alpha(x,y) = (x+y,\ -x+y)$.

d) $V = M_2(\mathbb{R}), \quad \alpha\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -2d \\ -a & -b \end{pmatrix}$.

Exercice 2. *On considère l'application de transposition $\alpha : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ définie par $\alpha(A) = A^t \quad \forall A \in M_2(\mathbb{R})$.*

a) Déterminer la matrice de α par rapport à la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$ et calculer ses valeurs propres.

b) Déterminer les espaces propres correspondant à chaque valeur propre et trouver une base de chaque espace propre.

Exercice 3. *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & \frac{6}{5} & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -5 & 5 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

a) Trouver les valeurs propres de A.

b) Trouver des bases des sous-espaces propres de A.

c) Peut-on déduire de a) si A est inversible ou non?

d) Donner les valeurs propres de A^2.

e) Donner des bases des sous-espaces propres de A^2.

Exercice 4. *Soit $\alpha : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice par rapport à la base canonique $\{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ est*

$$M = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 13 & 2 & -3 \\ 2 & 10 & 6 \\ -3 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Calculer le polynôme caractéristique de α et déterminer les valeurs propres de α et les espaces propres correspondants.

Exercice 5. *a) Soit P une matrice inversible de taille 2×2 et D une matrice diagonale. On pose $A = PDP^{-1}$. Montrer que $A^2 = PD^2P^{-1}$, puis déduire une formule qui permet de calculer A^{10}.*

b) *On considère les matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}, \ P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \ \text{et } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que $A = PDP^{-1}$, puis calculer A^{10} en utilisant le point a).

Exercice 6. *Soit $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices symétriques de taille 2×2, dont une base est donnée par $\mathcal{B} = \{S_1, S_2, S_3\}$ où*

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad S_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $T : \mathcal{S}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ la transformation linéaire définie par

$$T \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a-d & -b \\ -b & -a+2d \end{pmatrix}.$$

a) *Calculer les 3 valeurs propres (distinctes) $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ de T.*

b) *Pour $i \in \{1,2,3\}$, trouver un vecteur propre $M_i \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ associé à λ_i. Montrer que $\mathcal{B}' = \{M_1, M_2, M_3\}$ est une base de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$.*

c) *Ecrire la matrice $(T)_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}$ de T par rapport à la base $\mathcal{B}'$.*

d) *Calculer $T^{10}(A)$, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.*

Exercice 7. *Soit $\phi \in \mathcal{L}(V,V)$. Soient $U, W \subseteq V$ des sous-espaces ϕ-invariants. Montrer que $W \cap U$ et $W + U$ sont aussi ϕ-invariants.*

Exercice 8 (Cet exercice complète une preuve du cours)**.** *Soit V un K-espace vectoriel de dimension n, avec une base fixée B, et soit $P \in \mathrm{GL}_n(K)$. Montrer qu'il existe une base E de V telle que $P = (\mathrm{id})_E^B$. Ensuite expliciter la base E dans le cas concret de $V = \mathbb{C}^2$, $B = ((-1,1),(1,1))$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ 3 & 2\mathrm{i} \end{pmatrix}$.*

Exercice 9 (Facultatif)**.** *Soit $\alpha \in \mathcal{L}(V)$ une transformation linéaire d'un espace vectoriel V de dimension finie. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\mathrm{Ker}\,(\alpha^n)$ et $\mathrm{Im}\,(\alpha^n)$ sont invariants par α.*

Exercice 10. (†) *Soit $\varphi : V \to V$ et $\psi : V \to V$ des endomorphismes d'un K-espace vectoriel V tels que φ possède une valeur propre non nulle et $\psi \circ \varphi = \varphi$.*

(i) *Montrer que 1 est une valeur propre de ψ.*

(ii) *Montrer que si V est de dimension finie alors la multiplicité algébrique de la valeur propre 1 pour l'endomorphisme ψ est au moins $\dim(\mathrm{Im}\,\varphi)$.*

Exercice 11 (Cet exercice complète une preuve du cours)**.** *Soit V un K-espace vectoriel de dimension finie et soit $\phi \in \mathcal{L}(V,V)$. Montrer que si ϕ est triagonalisable, alors il existe des bases B et E de V telle que $(\phi)_B^B$ soit triangulaire supérieure et $(\phi)_E^E$ soit triangulaire inférieure.*

Exercice 12. ($\star$) *Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Trouver toutes les valeurs propres de A et les espaces propres associés.*

Exercice 13. ($\star$) *Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé. On considère la transformation linéaire α de $M_2(\mathbb{R})$ définie par*

$$\alpha \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-a)x + ay & x \\ 2z + t & t \end{pmatrix}.$$

a) *Calculer le polynôme caractéristique de α et trouver ses valeurs propres.*

b) *Trouver les espaces propres correspondants.*