
Série 10

19 novembre

Notation: Soit p un nombre premier. On note $\mathbb{F}_p$ le corps fini à p éléments et écrira simplement a pour $\bar{a}$, pour un élément $\bar{a}$ de $\mathbb{F}_p$.
On fixe un corps K.
On écrira $M_n(K)$ pour $M_{n\times n}(K)$.
le symbole δ_{rs}, *le Kronecker delta*, désigne le nombre naturel 0 si $r \neq s$ et le nombre naturel 1 si $r = s$.
Dans cette série et toutes les suivantes, on utilisera les deux notations $A \subset B$ et $A \subseteq B$ pour indiquer qu'une partie A est un sous-ensemble d'une partie B, c'est-à-dire que tout élément de la partie A appartient à la partie B.

A cette série, vous pouvez rendre pour correction l'exercice 6. Il faut le donner à un des assistants de votre salle d'exercices au plus tard lors de la séance d'exercices du 26 novembre.

Les exercices notés avec (†) sont plus difficiles, mais un bon entrainement pour utiliser la théorie du cours.

Exercice 1. *Échelonner les matrices suivantes pour obtenir une matrice ligne équivalente et sous une forme échelonnée réduite, et noter les opérations élémentaires effectuées à chaque étape de calcul:*

1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & -3 \\ 4 & -1 & 6 & -4 \\ -2 & 2 & -6 & 5 \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$,

2) $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -6 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in M_{4\times 5}(\mathbb{R})$,

3) $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & 4 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & -3 & 2 & -3 \\ 4 & 3 & -2 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & -1 & 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{4\times 6}(\mathbb{R})$.

Exercice 2. *Dans chaque cas, trouver une base échelonnée réduite du sous-espace vectoriel W de K^n.*

a) $K = \mathbb{R}$, $n = 5$ *et* $W = \mathrm{Vect}\big((1,-3,2,0,1),\ (1,1,6,4,1),\ (4,-6,14,3,4)\big)$.

b) $K = \mathbb{C}$, $n = 4$ *et* $W = \mathrm{Vect}\big((1,i,-i,4),\ (-i,2,0,1-i),\ (3,2+3i,2-4i,4-2i)\big)$.

c) $K = \mathbb{F}_5$, $n = 3$ *et* $W = \mathrm{Vect}\big((1,1,1),\ (0,2,4),\ (3,0,2),\ (0,1,4),\ (4,1,2)\big)$.

Exercice 3. *Trouver une base du sous-espace vectoriel*

$$W = \mathrm{Vect}\,(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1+i \\ 1 & 4+i & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 & i \\ 1 & i & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i-5 & i-5 & -2-i \\ -1 & -8 & 8 \end{pmatrix}) \subset M_{2\times 3}(\mathbb{C}).$$

Ensuite compléter cette base en une base de l'espace $M_{2\times 3}(\mathbb{C})$.

Exercice 4. *Soit $\alpha : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^3$ l'application $\mathbb{C}$-linéaire définie par*

$$\alpha(x,y,z,t) = (x + (2+i)z,\ 3x + iy + (7+4i)z + (-1+i)t,\ y + (1-i)z + (a+i)t)$$

avec $a \in \mathbb{R}$ un nombre réel fixé.

a) *Trouver une base échelonnée réduite de* $\mathrm{Im}\,(\alpha)$.

b) *Quel est le rang de α?*

c) *Quelle est la dimension de* $\mathrm{Ker}\,(\alpha)$*?*

Exercice 5. *Soit* $\phi : \mathbb{C}^4 \to M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ *l'application linéaire définie par* $\phi(a,b,c,d) = \begin{pmatrix} a-b+c & a+b+d \\ 2a-ib & ib+c+d \end{pmatrix}$. *Trouver une base de* $\mathrm{Im}\,(\phi)$.

Exercice 6 (Cet exercice complète la preuve du 5.3.11 des notes du cours.)**.** *Soit* V *et* W *deux* K*-espaces vectoriels de dimension finie et* $\phi \in \mathcal{L}(V,W)$. *Soit* B_V, B_W *des bases ordonnées de* V *et* W, *respectivement. Montrer que* ϕ *est bijective si et seulement si* $(\phi)_{B_V}^{B_W}$ *est une matrice inversible.*

Exercice 7 (Cet exercice complète la preuve des propriétés des matrices élémentaires)**.** *Soit* $A \in M_{n\times p}(K)$. *On note* A_i *la* i*-ème ligne de* A *et donc on écrit* $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$.

(a) Démontrer que

$$\text{pour } 1 \le r \le n, \ \text{ et } \lambda \in K, \ \text{ on a } D_r(\lambda)A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_{r-1} \\ \lambda A_r \\ A_{r+1} \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}.$$

(b) Démontrer que pour $1 \le r, s \le n$, $r < s$, *on a* $T_{rs}A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_s \\ \vdots \\ A_r \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$, *c'est-à-dire que* $T_{rs}A$ *est la matrice obtenue à partir de la matrice* A *en echangeant les lignes* A_r *et* A_s.

Exercice 8. † **Unicité des systèmes échelonnés réduits.** *Dans* K^n, *on considère deux systèmes de vecteurs "échelonnés réduits"* $(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ *et* $(w_1, w_2, \ldots, w_p)$, *c'est-à-dire, si* A *est la matrice* $p \times n$ *dont la* i*-ème ligne est* v_i, *alors* A *est échelonnée réduite. Pareil pour le deuxième ensemble de vecteurs* $(w_1, \ldots, w_p)$ *(avec matrice associée* B*). Soient* $j_1, \ldots, j_r$ *les échelons de* A *(si bien que* $v_{r+1} = \ldots = v_p = 0$ *si* $r < p$*) et soient* $k_1, \ldots, k_s$ *les échelons de* B *(si bien que* $w_{s+1} = \ldots = w_p = 0$ *si* $s < p$*).*

On suppose que $\mathrm{Vect}\,(v_1, \ldots, v_r) = \mathrm{Vect}\,(w_1, \ldots, w_s)$ *et on veut démontrer que les deux systèmes sont égaux.*

a) Montrer que $r = s$.

b) Montrer que $v_r = w_r$ *et que* $j_r = k_r$ *et en déduire que* $v_i = w_i$ *et que* $j_i = k_i$ *pour tout* $1 \le i \le r$.

Exercice 9 (Résultat à retenir)**.** *Soit* $A \in M_{n\times m}(K)$. *Soit* C_i *la* i*-ème colonne de* A *et posons* $W = \mathrm{Vect}\,(C_1, \ldots, C_m) \subset K^n$. *Soit* $j_1 < j_2 < \cdots < j_r$ *les échelons dans la forme échelonnée réduite de* A. *Montrer que les colonnes* $C_{j_1}, C_{j_2}, \ldots, C_{j_r}$ *forment une base de* W.

(Notez que ce résultat peut être utilisé pour trouver une base de l'image d'une application linéaire après avoir échelonné la matrice de l'application.)

Exercice 10 (Facultatif)**.** *Soit* K *un corps. Dans la série 9, exercice 8, on vous a demandé de démontrer qu'une matrice* $A \in M_n(K)$ *est scalaire si et seulement si* A *commute avec toutes les matrices de* $M_n(K)$.

Ici on propose une solution "non matricielle", avec indications, de l'implication "si A *commute avec toutes les matrices alors* A *est une matrice scalaire".*

Soit $V = K^n$, *avec base canonique* $C = (e_1, \ldots, e_n)$. *Soit maintenant* $\phi \in \mathcal{L}(V,V)$ *telle que* $(\phi)_C^C = A$*; une telle application* ϕ *existe par la bijectivité de l'application* $\Theta : \mathcal{L}(V,V) \to M_n(K)$. *Comme* $AB = BA$ *pour tout* $B \in M_n(K)$, *on a que* $\phi \circ \psi = \psi \circ \phi$ *pour tout* $\psi \in \mathcal{L}(V,V)$ *(de nouveau par la bijectivité de* Θ *et le fait que* Θ *est un morphisme d'anneaux).*

(a) *Montrer que pour* ϕ, ψ *comme ci-dessus,* $\phi(\ker \psi) \subseteq \ker \psi$.

(b) *Posons* $\psi_i \in \mathcal{L}(V, V)$ *l'application linéaire telle que* $\psi_i(e_j) = (1 - \delta_{ij})e_j$. *Montrer que* $\ker(\psi_i) = \mathrm{Vect}\,(e_i)$.

(c) *Déduire à partir de (a) et (b) qu'il existe* $\alpha_i \in K$ *tel que* $\phi(e_i) = \alpha_i e_i$ *pour* $1 \leq i \leq n$ *et par conséquent* A *est une matrice diagonale. (Donc il reste à montrer que* $\alpha_i = \alpha_j$ *pour tout* i, j.*)*

(d) *Soient* $1 \leq i \neq j \leq n$ *et soit* $\theta_{ij} \in \mathcal{L}(V, V)$ *l'application linéaire telle que* $\theta_{ij}(e_k) = \delta_{ik}e_j + \delta_{jk}e_i$*, donc* $\theta_{ij}(e_i) = e_j$, $\theta_{ij}(e_j) = e_i$ *et* $\theta_{ij}(e_k) = 0$ *si* $k \notin \{i, j\}$. *Montrer que* $\phi \circ \theta_{ij} = \theta_{ij} \circ \phi$ *implique que* $\alpha_i = \alpha_j$.