27 novembre 2024, 15h15 - 18h15

L'examen blanc

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- **Aucun document** n'est autorisé.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  - $+3$ points si la réponse est correcte, et
  - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite, ou si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **Vrai-faux**, on comptera :
  - $+1$ points si la réponse est correcte,
  - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite, et
  - -1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions à choix multiple et les questions vrai-faux utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleue foncée** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Pour les questions ouvertes:
  - vous pouvez utiliser un crayon à papier à condition d'écrire lisiblement;
  - répondre dans l'espace dédié;
  - votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement et des calculs doivent figurer dans le dossier rendu;
  - si vous utilisez des résultats du cours, citez-les explictement;
  - laisser libre les cases à cocher, elles sont réservées au correcteur.
- Les éventuels points négatifs aux questions de type vrai-faux sont comptabilisés dans le total des points.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.

Notation: Dans tout l'examen, on utilise les notations suivantes:

- K est un corps quelconque; on écrira 0 pour l'élément neutre pour l'addition et 1 pour l'élément neutre pour la multiplication.
- $\mathbb{R}$ est le corps des nombres réels.
- $\mathbb{Q}$ est le corps des nombres rationnels.
- $\mathbb{C}$ est le corps des nombres complexes, $\mathbb{C} = \{a + b\mathrm{i} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.
- Pour un nombre premier p, $\mathbb{F}_p$ est le corps fini à p éléments des entiers modulo p, et pour $a \in \mathbb{Z}$, on écrit encore $a \in \mathbb{F}_p$, pour la classe de a modulo p.
- $K[t]$ désigne l'anneau des polynômes à coefficients dans K.
- $K[t]_{\leq m}$ désigne le K-espace vectoriel des polynômes à coefficients dans K de degré au plus m.
- I_m désigne la matrice identité de taille $m \times m$.
- $M_{n\times m}(K)$ désigne le K-espace vectoriel des matrices de taille $n \times m$ et à coefficients dans K.
- $\mathrm{GL}_n(K)$ désigne le groupe des matrices inversibles de taille $n \times n$ à coefficients dans K, avec loi de composition la multiplication de matrices.
- X est le vecteur colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ formé des inconnues $x_1, \ldots, x_n$.
- Pour un K-espace vectoriel V de dimension finie avec base ordonnée B, et pour $v \in V$, on écrit $(v)_B$ pour le vecteur colonne formé des coordonnées de v par rapport à la base B.
- On utilisera les deux notations $A \subset B$ et $A \subseteq B$ pour indiquer qu'une partie A est un sous-ensemble d'une partie B, c'est-à-dire que tout élément de la partie A appartient à la partie B

Première partie, questions de type ouvert

Rappel des consignes:

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse.

Exercice 1 (11 points). *Soit $W = \{p \in \mathbb{R}[t]_{\leq 4} \mid p(1) = 0\}$ et $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Soit $S : W \to V$ l'application $\mathbb{R}$-linéaire qui satisfait à*

$$S(1-t) = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad S(1-t^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}; \quad S(1-t^3) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2 \\ 2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}; \quad S(1-t^4) = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

(a) Trouver une base de $\operatorname{Ker}(S)$.

(b) Trouver une base de $\operatorname{im}(S)$.

(c) Déterminer si p appartient à $\operatorname{Ker}(S)$ pour $p = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}t^3 + 2\sqrt{3}t^4$.

(d) Déterminer si $\begin{pmatrix} 2 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$ *appartient à* $\operatorname{im}(S)$.

Exercice 2 (5 points). *Soient V et W des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels et soient $B = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ une base ordonnée de V et $C = (w_1, w_2, w_3, w_4, w_5)$ une base ordonnée de W. Soit $T : V \to W$ l'application $\mathbb{R}$-linéaire telle que la matrice de T par rapport aux deux bases données est la matrice A. Soient encore $\hat{B}$ et $\hat{C}$ les bases ordonnées suivantes de V et W:*

$$\hat{B} = (2v_1 - v_2, v_2 + v_3 - v_4, v_3 + v_4, v_4) \text{ et } \hat{C} = (w_2, w_3, w_5, -w_1, -w_4).$$

Donner les matrices inversibles P et Q telles que

$$QAP(v)_{\hat{B}} = (T(v))_{\hat{C}} \text{ pour tout } v \in V.$$

Exercice 3 (8 points). *Soit $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soient encore $f_i \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $1 \leq i \leq 4$, les fonctions suivantes :*

$$f_1(x) = \sin x, \quad f_2(x) = \cos x, \quad f_3(x) = e^x, \quad f_4(x) = e^{2x}.$$

Posons $W = \operatorname{Vect}(f_1, f_2, f_3, f_4) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(a) *Démontrer que pour tout $f \in W$, on a que $f' - f \in W$, où f' est la dérivée de f.*

(b) *On suppose que $B = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ est une base de W. On définit une application $\varphi : W \to W$ par $\varphi(f) = f' - f$. On admettra que φ est $\mathbb{R}$-linéaire. Trouver la matrice de φ par rapport à la base B, c'est-à-dire trouver $(\varphi)_B^B$.*

(c) *Montrer que l'ensemble $B = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ de la partie (b) est bien une base de W.*

Exercice 4 (10 points). *Soient V et W des K-espaces vectoriels de dimension finie. Soient $\varphi : V \to W$ et $\psi : W \to V$ des applications K-linéaires.*

(a) Montrer que si $\varphi \circ \psi = 0$ alors $\dim V \geq \dim(\operatorname{im}\psi) + \dim(\operatorname{im}\varphi)$.

(b) Montrer que si $\varphi \circ \psi$ est injective, alors $\dim V \geq \dim W$.

(c) Montrer que si $\varphi \circ \psi$ est surjective, alors ψ est injective.

(d) Montrer que si $W = \ker(\psi) \oplus \operatorname{im}(\varphi)$, alors $\operatorname{rang}(\psi \circ \varphi) = \operatorname{rang}(\varphi) = \operatorname{rang}(\psi)$.

Exercice 5 (8 points). *Soient K un corps, V et W deux K-espaces vectoriels et ϕ et ψ des applications K-linéaires de V dans W.*

(a) Montrer que $\mathrm{im}(\phi + \psi) \subset \mathrm{im}(\phi) + \mathrm{im}(\psi)$.

(b) Donner un exemple pour montrer que l'inclusion de (a) peut être une inclusion stricte, c'est-à-dire, donner un exemple de ϕ et ψ où $\mathrm{im}(\phi + \psi) \neq \mathrm{im}(\phi) + \mathrm{im}(\psi)$.

(c) Supposons que

(i) $\mathrm{im}(\phi) \cap \mathrm{im}(\psi) = \{0\}$,

(ii) $\phi \neq 0$, *et*

(iii) $\psi \neq 0$.

Montrer que $\{\phi, \psi\}$ est un sous-ensemble libre de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(V, W)$.

Exercice 6 (3 points). *Soit $\varphi : M_{n\times m}(K) \to K[t]_{\leq m-2}$ une application K-linéaire. Montrer qu'il existe $A \in \mathrm{Ker}\,(\varphi)$ avec $A_{1j} \neq 0$ pour au moins un j, $1 \leq j \leq m$.*

Deuxième partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Exercice 7. *Soit* $W = \{f \in \mathbb{C}[t]_{\leq 3} \mid f(\mathrm{i}) = 0 \text{ et } f''(1+\mathrm{i}) = 0\}$. *Laquelle des affirmations suivantes est correcte?*

- ☐ W *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{C}[t]_{\leq 3}$ *avec base* $\{f_1, f_2\}$ *où*

$$f_1 = (2-3\mathrm{i}) + (3-3\mathrm{i})t^2 + \mathrm{i}t^3 \quad \text{et} \quad f_2 = 1 - \mathrm{i}t.$$

- ☐ W *n'est pas un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{C}[t]_{\leq 3}$.
- ☐ W *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{C}[t]_{\leq 3}$ *et* $\{g_1, g_2, g_3\}$ *est une famille génératrice de* W, *où*

$$g_1 = (2-3\mathrm{i}) + (3-3\mathrm{i})t^2 + \mathrm{i}t^3, \quad g_2 = 1 + \mathrm{i}t \quad \text{et} \quad g_3 = 3 + 3\mathrm{i} - t + (3+3\mathrm{i})t^2 - t^3.$$

- ☐ W *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{C}[t]_{\leq 3}$ *de dimension* 3.

Exercice 8. *Soit* $W = \mathrm{Vect}\,(A_1, A_2, A_3, A_4) \subseteq M_{2\times 2}(\mathbb{C})$, *où*

$$A_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2i & 0 \end{pmatrix} \text{ et } A_4 = \begin{pmatrix} i+1 & -4 \\ 1+3i & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors

- ☐ $\dim W = 3$ *et il existe une base* B *de* W *telle que* $B \cup \{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \}$ *est une base de* $M_{2\times 2}(\mathbb{C})$.
- ☐ $\dim W = 3$ *et il existe une base* B *de* W *telle que* $B \cup \{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \}$ *est une base de* $M_{2\times 2}(\mathbb{C})$.
- ☐ $\dim W = 2$ *et il existe une base* B *de* W *telle que* $B \cup \{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \}$ *est une base de* $M_{2\times 2}(\mathbb{C})$.
- ☐ $\dim W = 2$ *et il existe une base* B *de* W *telle que* $B \cup \{ \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \}$ *est une base de* $M_{2\times 2}(\mathbb{C})$

Exercice 9. *Soit* λ *un paramètre réel. On considère le système suivant d'équations linéaires à coefficients dans* $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1. \end{cases} \qquad \text{Alors}$$

- ☐ *le système possède au moins une solution si et seulement si* $\lambda \notin \{1, -2\}$.
- ☐ *si* $\lambda = 1$, *l'ensemble des solutions du système est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$ *de dimension 2.*
- ☐ *le système possède une solution unique si et seulement si* $\lambda \neq -2$.
- ☐ *le système possède une solution unique si* $\lambda \notin \{-1, 1, -2\}$.

Troisième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire, si elle est parfois fausse).

Exercice 10. *Soient U, W deux sous-espaces vectoriels d'un K-espace vectoriel V. On suppose que U et W sont de dimension finie et que $\dim U = \dim W$. Alors $U \cup W$ est un sous-espace vectoriel de V si et seulement si $U = W$.*

☐ **VRAI** ☐ **FAUX**

Exercice 11. *Soient $X, Y \in \mathrm{GL}_n(K)$, et posons $W = \{D \in M_{n\times n}(K) \mid DXD = DYD\}$. Alors W est un sous-espace vectoriel de $M_{n\times n}(K)$ de dimension au moins 1.*

☐ **VRAI** ☐ **FAUX**

Exercice 12. *Soient V un $\mathbb{F}_5$-espace vectoriel et soient S et T des sous-ensembles de V.*

(a) On a que $\mathrm{Vect}\,(S \cup T) \subseteq \mathrm{Vect}\,(S) \cup \mathrm{Vect}\,(T)$.

☐ **VRAI** ☐ **FAUX**

(b) On a que $\mathrm{Vect}\,(S \cap T) \subseteq \mathrm{Vect}\,(S) \cap \mathrm{Vect}\,(T)$.

☐ **VRAI** ☐ **FAUX**

Exercice 13. *Soient V un K-espace vectoriel et $X \subseteq V$ un sous-ensemble de V.*

(a) Si X est un sous-espace vectoriel de V alors $\mathrm{Vect}\,(X) = X$.

☐ **VRAI** ☐ **FAUX**

(b) Si X est un sous-espace vectoriel de V alors $\dim \mathrm{Vect}\,(X) = \dim X$.

☐ **VRAI** ☐ **FAUX**

(c) Si $\lambda x + y \in X$ pour tous $x, y \in X$ et pour tout $\lambda \in K$ alors X est un sous-espace vectoriel de V.

☐ **VRAI** ☐ **FAUX**