Corrigé 9

12 novembre

Notation: Soit p un nombre premier. On note $\mathbb{F}_p$ le corps fini à p éléments et écrira simplement a pour $\bar{a}$, pour un élément $\bar{a}$ de $\mathbb{F}_p$.
On fixe un corps K.
On écrira $M_n(K)$ pour $M_{n\times n}(K)$.
Dans cette série et toutes les suivantes, on utilisera les deux notations $A \subset B$ et $A \subseteq B$ pour indiquer qu'une partie A est un sous-ensemble d'une partie B, c'est-à-dire que tout élément de la partie A appartient à la partie B.

A cette série, vous pouvez rendre pour correction l'exercice 3. Il faut le donner à un des assistants de votre salle d'exercices au plus tard lors de la séance d'exercices du 19 novembre.

Les exercices notés avec (†) sont plus difficiles, mais un bon entrainement pour utiliser la théorie du cours.

Exercice 1. *Soit $\alpha : \mathbb{C}[t]_{\leq 3} \to \mathbb{C}[t]_{\leq 3}$ l'application linéaire envoyant $f(t)$ vers $2f'(t) - f(t)$ et $\beta : \mathbb{C}[t]_{\leq 3} \to \mathbb{C}[t]_{\leq 2}$ l'application linéaire envoyant $f(t)$ vers $f'(t)$.*

a) Déterminer la matrice de α par rapport à la base ordonnée $E = (1, t, t^2, t^3)$ de $\mathbb{C}[t]_{\leq 3}$.

b) Déterminer la matrice de β par rapport aux bases E de $\mathbb{C}[t]_{\leq 3}$ et $E' = (1, t, t^2)$ de $\mathbb{C}[t]_{\leq 2}$.

c) Déterminer la matrice de $\beta \circ \alpha$ par rapport aux bases E et E' de $\mathbb{C}[t]_{\leq 3}$ et de $\mathbb{C}[t]_{\leq 2}$.

Solution 1. a) Comme

$$\begin{array}{rclcl}
\alpha(1) & = & -1 & = & (-1)\cdot 1 + 0\cdot t + 0\cdot t^2 + 0\cdot t^3, \\
\alpha(t) & = & 2 - t & = & 2\cdot 1 + (-1)\cdot t + 0\cdot t^2 + 0\cdot t^3, \\
\alpha(t^2) & = & 4t - t^2 & = & 0\cdot 1 + 4\cdot t + (-1)\cdot t^2 + 0\cdot t^3, \\
\alpha(t^3) & = & 6t^2 - t^3 & = & 0\cdot 1 + 0\cdot t + 6\cdot t^2 + (-1)\cdot t^3,
\end{array}$$

la matrice de α par rapport à la base E de $\mathbb{C}[t]_{\leq 3}$ est $(\alpha)_E^E = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

b) Comme

$$\begin{array}{rclcl}
\beta(1) & = & 0 & = & 0\cdot 1 + 0\cdot t + 0\cdot t^2, \\
\beta(t) & = & 1 & = & 1\cdot 1 + 0\cdot t + 0\cdot t^2, \\
\beta(t^2) & = & 2t & = & 0\cdot 1 + 2\cdot t + 0\cdot t^2, \\
\beta(t^3) & = & 3t^2 & = & 0\cdot 1 + 0\cdot t + 3\cdot t^2,
\end{array}$$

la matrice de β par rapport aux bases E et E' est $(\beta)_E^{E'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

c) D'après le cours,

$$\begin{aligned}
(\beta\circ\alpha)_E^{E'} &= (\beta)_E^{E'} \cdot (\alpha)_E^E \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Exercice 2 (Résultat à retenir)**.** *Soit $\phi : M_{r\times s}(K) \to M_{s\times r}(K)$ l'application définie par $\phi(A) = A^t$.*

(a) Démontrer que pour toute matrices $A \in M_{p\times q}(K)$, $B \in M_{q\times r}(K)$, on a $(AB)^t = B^t A^t$.

(b) *Montrer que ϕ est une application K-linéaire bijective.*

(c) *Dans le cas particulier $r = 1$ et $s = 3$, donner la matrice de ϕ par rapport aux bases ordonnées $E = (E_{11}, E_{12}, E_{13})$ et $F = (E_{31}, E_{21}, E_{11})$ de $M_{1\times 3}(K)$ et $M_{3\times 1}(K)$, respectivement. (Attention à l'ordre dans la base F.)*

Solution 2. (a) Posons $AB = C \in M_{p\times r}(K)$. On a $C_{ik} = \sum_{j=1}^{q} A_{ij}B_{jk}$ et donc

$$(AB)^t = C^t = C', \quad \text{avec} \quad C'_{ki} = C_{ik} = \sum_{j=1}^{q} A_{ij}B_{jk}.$$

D'autre part $A^t = A'$ avec $A'_{ji} = A_{ij}$, $B^t = B'$ avec $B'_{kj} = B_{jk}$ et par conséquent

$$B^tA^t = D, \quad \text{avec} \quad D_{ki} = \sum_{j=1}^{q} B'_{kj}A'_{ji} = \sum_{j=1}^{q} B_{jk}A_{ij} = C_{ik} = C'_{ki}.$$

On voit donc que $D = C^t$.

(b) Soient $X, Y \in M_{r\times s}(K)$ et $\lambda \in K$. On a

$$((\lambda X + Y)^t)_{ij} = (\lambda X + Y)_{ji} = (\lambda X)_{ji} + Y_{ji} = \lambda(X_{ji}) + Y_{ji} = \lambda(X^t)_{ij} + (Y^t)_{ij}.$$

Cette dernière égalité montre que $(\lambda X + Y)^t = \lambda \cdot X^t + Y^t$.
Donc $\phi(\lambda X + Y) = (\lambda X + Y)^t = \lambda X^t + Y^t = \lambda\phi(X) + \phi(Y)$ et ϕ est K-linéaire.

Pour la bijectivité on montrera que $\ker(\phi)$ est la matrice nulle, par conséquent ϕ est injective, et comme $\dim M_{r\times s}(K) = rs = \dim M_{s\times r}(K)$ on a la bijectivité par un des critères de bijectivité du cours.
Soit $X \in M_{r\times s}(K)$ telle que $\phi(X) = 0$. Donc $X_{ji} = 0$ pour tous j, i et on déduit que X est la matrice nulle.

(c) On a $\phi(E_{11}) = E_{11}$ et donc la première colonne de la matrice $(\phi)_E^F$ est $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. On fait de même pour les autres vecteurs de la base E et on trouve $(\phi)_E^F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 3. *Soit $\alpha : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par*

$$\alpha(x, y, z, t) = (2x - y, x + y + z + t, 3y - 2z + x - t).$$

a) *Déterminer la matrice de α par rapport aux bases canoniques de $\mathbb{R}^4$ et de $\mathbb{R}^3$.*

b) *Quelle est le vecteur colonne de $\alpha(0, 1, 0, 0)$ par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^3$?*

c) *Montrer que $F = ((-1, 0, 0, 1), (0, 4, 0, 1), (0, 0, 3, 1), (0, 0, 0, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^4$.*

d) *Déterminer le vecteur colonne de $v = (1, 4, 3, -1)$ par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^4$?*

e) *Déterminer le vecteur colonne de v par rapport à la base F.*

Solution 3. a) Soient $E = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et $E' = (e_1, e_2, e_3)$ celle de $\mathbb{R}^3$. Alors comme

$$\begin{array}{lclcl}
\alpha(e_1) & = & \alpha(1,0,0,0) = (2,1,1) & = & 2\cdot e_1 + 1\cdot e_2 + 1\cdot e_3, \\
\alpha(e_2) & = & \alpha(0,1,0,0) = (-1,1,3) & = & (-1)\cdot e_1 + 1\cdot e_2 + 3\cdot e_3, \\
\alpha(e_3) & = & \alpha(0,0,1,0) = (0,1,-2) & = & 0\cdot e_1 + 1\cdot e_2 + (-2)\cdot e_3, \\
\alpha(e_4) & = & \alpha(0,0,0,1) = (0,1,-1) & = & 0\cdot e_1 + 1\cdot e_2 + (-1)\cdot e_3,
\end{array}$$

par définition, la matrice $(\alpha)_E^{E'} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

b) On note $w = (0, 1, 0, 0)$. Alors comme $w = e_2 = 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 + 0 \cdot e_4$, on a $(w)_E = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. D'après le cours,

$$\begin{aligned} (\alpha(w))_{E'} &= (\alpha)_E^{E'}(w)_E \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Noter bien que cette dernière égalité est cohérente avec le fait que $\alpha((0, 1, 0, 0)) = (-1, 1, 3)$.

c) Notons $F = (f_1, f_2, f_3, f_4)$.

Première méthode: On voit aisément que

$$\begin{array}{lllll} e_1 & = & -f_1 + f_4 & = & (-1) \cdot f_1 + 0 \cdot f_2 + 0 \cdot f_3 + 1 \cdot f_4 \\ e_2 & = & \frac{1}{4}(f_2 - f_4) & = & 0 \cdot f_1 + \frac{1}{4} \cdot f_2 + 0 \cdot f_3 + (-\frac{1}{4}) \cdot f_4 \\ e_3 & = & \frac{1}{3}(f_3 - f_4) & = & 0 \cdot f_1 + 0 \cdot f_2 + \frac{1}{3} \cdot f_3 + (-\frac{1}{3}) \cdot f_4 \\ e_4 & = & f_4 & = & 0 \cdot f_1 + 0 \cdot f_2 + 0 \cdot f_3 + 1 \cdot f_4. \end{array}$$

Donc F engendre tout élément de la base canonique E et comme F est de cardinal 4 qui est la dimension de $\mathbb{R}^4$, F est une base de $\mathbb{R}^4$. De plus, on obtient

$$(\mathrm{id}\,)_E^F = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

Deuxième méthode: On peut montrer aisément que F est libre, donc elle est une base de $\mathbb{R}^4$, puisqu'elle est de cardinal 4 qui est la dimension de $\mathbb{R}^4$.

d) Comme $v = (1, 4, 3, -1) = 1 \cdot e_1 + 4 \cdot e_2 + 3 \cdot e_3 + (-1) \cdot e_4$, on a $(v)_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

e) D'après le cours,

$$\begin{aligned} (v)_F &= (\mathrm{id}\,)_E^F \cdot (v)_E \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercice 4. *Soit la matrice* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(K)$.

(a) Montrer que si $ad - bc \neq 0$ *alors* A *est inversible et* $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

(b) On considère l'application $\mathbb{C}$*-linéaire* $\phi : \mathbb{C}[t]_{\leq 1} \to M_{2\times 1}(\mathbb{C})$ *définie par* $\phi(f) = \begin{pmatrix} f(i) \\ f(0) \end{pmatrix}$. *On pose les bases ordonnées suivantes des deux espaces vectoriels :*

$B_1 = (1,t)$, $B_2 = (t-i, i)$, *des bases de* $\mathbb{C}[t]_{\leq 1}$ *et*

$C_1 = (\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix})$, *et* $C_2 = (\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\i\end{pmatrix})$, *des bases de* $M_{2\times 1}(\mathbb{C})$.

Trouver les matrices de passage suivantes :

$(\mathrm{id})_{B_1}^{B_2}$, $(\mathrm{id})_{B_2}^{B_1}$, $(\mathrm{id})_{C_1}^{C_2}$, $(\mathrm{id})_{C_2}^{C_1}$.

(c) Trouver les matrices de ϕ par rapport aux differents choix des bases, comme suit :

$(\phi)_{B_1}^{C_1}$, $(\phi)_{B_1}^{C_2}$, *et* $(\phi)_{B_2}^{C_2}$.

Solution 4. Pour (a), on vérifie que $\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, et le produit également dans l'autre sens.

(b) On exprime chaque élément de la base B_2 en termes de la base B_1 : $t - i = -i\cdot 1 + 1\cdot t$ et $i = i\cdot 1 + 0\cdot t$ et on trouve ainsi que $(\mathrm{id})_{B_2}^{B_1} = \begin{pmatrix}-i & i\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. Ensuite, on trouve $(\mathrm{id})_{B_1}^{B_2} = ((\mathrm{id})_{B_2}^{B_1})^{-1} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -i & 1\end{pmatrix}$, où la dernière égalité vient de la formule de la partie (a).

On fait de même pour trouver $(\mathrm{id})_{C_1}^{C_2}$ et $(\mathrm{id})_{C_2}^{C_1}$:

$(\mathrm{id})_{C_2}^{C_1} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & i\end{pmatrix}$ et $(\mathrm{id})_{C_1}^{C_2} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ i & -i\end{pmatrix}$.

Pour (c), on calcule $\phi(1) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $\phi(t) = \begin{pmatrix}i\\0\end{pmatrix}$. Ainsi nous avons $(\phi)_{B_1}^{C_1} = \begin{pmatrix}1 & i\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. Ensuite on utilise les résultats du cours :

$$(\phi)_{B_1}^{C_2} = (\mathrm{id})_{C_1}^{C_2}(\phi)_{B_1}^{C_1} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ i & -i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & i\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & i\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Ensuite, on a

$$(\phi)_{B_2}^{C_2} = (\mathrm{id})_{C_1}^{C_2}(\phi)_{B_1}^{C_1}(\mathrm{id})_{B_2}^{B_1} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ i & -i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & i\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-i & i\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & i\\ -1 & 0\end{pmatrix}.$$

Exercice 5. *Soit $\mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ l'espace vectoriel des polynômes de degré ≤ 2 à coefficients dans $\mathbb{R}$. Soient $E = (1, t, t^2)$ la base ordonnée de $\mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ et $F = (1+t, t+t^2, t^2)$. Soit $\alpha : \mathbb{R}[t]_{\leq 2} \to \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ l'application $\mathbb{R}$-linéaire définie par $\alpha(a + bt + ct^2) = b + 2ct$ pour tous $a, b, c \in \mathbb{R}$.*

a) Montrer que F est une base de $\mathbb{R}[t]_{\leq 2}$.

b) Trouver les matrices de changement de base $(\mathrm{id}\,)_E^F$ et $(\mathrm{id}\,)_F^E$.

c) Déterminer $(\alpha)_E^E$.

d) Déterminer $(\alpha)_F^F$.

Solution 5. a) Notons $F = (f_1, f_2, f_3) = (1+t, t+t^2, t^2)$.

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $a(1+t) + b(t+t^2) + ct^2 = 0$. Alors en comparant les coefficients des termes, on obtient $a = 0, a + b = 0$ et $b + c = 0$, ce qui donne $a = b = c = 0$. Donc F est libre.

Comme le cardinal de F, qui vaut 3, est égal à la dimension de $\mathbb{R}[t]_{\leq 2}$. On obtient que F est bien une base de $\mathbb{R}[t]_{\leq 2}$.

b) Comme

$$\begin{cases} f_1 &= 1+t &= 1\cdot 1 + 1\cdot t + 0\cdot t^2,\\ f_2 &= t+t^2 &= 0\cdot 1 + 1\cdot t + 1\cdot t^2,\\ f_3 &= t^2 &= 0\cdot 1 + 0\cdot t + 1\cdot t^2,\end{cases}$$

la matrice de changement de base $S = (\mathrm{id}\,)_F^E = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

Comme

$$\begin{cases} 1 &= f_1 + f_3 - f_2 &= 1\cdot f_1 + (-1)\cdot f_2 + 1\cdot f_3,\\ t &= f_2 - f_3 &= 0\cdot f_1 + 1\cdot t + (-1)\cdot t^2,\\ t^2 &= f_3 &= 0\cdot f_1 + 0\cdot f_2 + 1\cdot f_3,\end{cases}$$

la matrice de changement de base $S^{-1} = (\mathrm{id}\,)_E^F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Comme

$$\begin{cases} \alpha(1) &= 0 &= 0 \cdot 1 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2, \\ \alpha(t) &= 1 &= 1 \cdot 1 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2, \\ \alpha(t^2) &= 2t &= 0 \cdot 1 + 2 \cdot t + 0 \cdot t^2, \end{cases}$$

on obtient la matrice $A = (\alpha)_E^E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

d) D'après la formule de changement de base, on a

$$\begin{aligned} B = (\alpha)_F^F &= S^{-1} A S \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On peut aussi calculer directement $(\alpha)_F^F$ par définition comme suit:

Comme

$$\begin{cases} \alpha(f_1) &= 1 &= 1 \cdot f_1 + (-1) \cdot f_2 + 1 \cdot f_3, \\ \alpha(f_2) &= 1 + 2t &= 1 \cdot f_1 + 1 \cdot f_2 + (-1) \cdot f_3, \\ \alpha(f_3) &= 2t &= 0 \cdot f_1 + 2 \cdot f_2 + (-2) \cdot f_3, \end{cases}$$

on obtient la matrice $B = (\alpha)_F^F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Exercice 6 (Cet exercice complète la preuve d'une des propriétés de la multiplication des matrices)**.** *Soient $A, B \in M_{r \times s}(K)$ et soit $C \in M_{s \times \ell}(K)$. Montrer que $(A+B)C = AC + BC$.*

Solution 6. On compare les composantes (i, j) des deux matrices :

$$((A+B)C)_{ij} = \sum_{k=1}^{s} (A+B)_{ik} C_{kj} = \sum_{k=1}^{s} (A_{ik}+B_{ik}) C_{kj} = \sum_{k=1}^{s} (A_{ik} C_{kj} + B_{ik} C_{kj}) = \sum_{k=1}^{s} A_{ik} C_{kj} + \sum_{k=1}^{s} B_{ik} C_{kj} = (AC)_{ij} + (BC)_{ij}.$$

Exercice 7 (Cet exercice complète la preuve du 5.3.3 des notes du cours)**.** *Soient V et W des K-espaces vectoriels de dimension finie avec bases ordonnées respectives B_V et B_W. Soient $\phi, \psi \in \mathcal{L}(V, W)$. Montrer que $(\phi + \psi)_{B_V}^{B_W} = (\phi)_{B_V}^{B_W} + (\psi)_{B_V}^{B_W}$ et que pour tout $\lambda \in K$ on a que $(\lambda \phi)_{B_V}^{B_W} = \lambda \cdot (\phi)_{B_V}^{B_W}$.*

Solution 7. On considère la (i, j) composante de la matrice $C = (\phi + \psi)_{B_V}^{B_W}$:

si $B_V = (e_1, \ldots, e_n)$ et $B_W = (f_1, \ldots, f_m)$ alors $(\phi + \psi)(e_j) = C_{1j} f_1 + \cdots + C_{ij} f_i + \cdots + C_{mj} f_m$.
Mais $(\phi + \psi)(e_j) = \phi(e_j) + \psi(e_j)$.
Si $A = (\phi)_{B_V}^{B_W}$ et $D = (\psi)_{B_V}^{B_W}$, alors $\phi(e_j) = A_{1j} f_1 + \cdots + A_{ij} f_j + \cdots A_{mj} f_m$ et
$\psi(e_j) = D_{1j} f_1 + \cdots + D_{ij} f_j + \cdots D_{mj} f_m$.
Maintenant on compare les expressions

$$C_{1j} f_1 + \cdots + C_{ij} f_i + \cdots + C_{mj} f_m \quad \text{et} \quad A_{1j} f_1 + \cdots + A_{ij} f_j + \cdots A_{mj} f_m + D_{1j} f_1 + \cdots + D_{ij} f_j + \cdots D_{mj} f_m,$$

pour conclure que $C_{ij} = A_{ij} + D_{ij}$. La preuve pour la deuxième assertion est pareille.

Exercice 8. *Soit K un corps. Démontrer qu'une matrice $A \in M_n(K)$ est scalaire si et seulement si A commute avec toutes les matrices de $M_n(K)$.*

Indication : Faire commuter A avec chacune des matrices E_{rs} de la base usuelle de $M_n(K)$.

Solution 8. Si A commute avec toute matrice de $M_n(K)$, alors A commute avec toute matrice E_{rs} et on va calculer le coefficient (i, j) de $E_{rs}A = AE_{rs}$. Rappelons que la matrice E_{rs} a pour coefficients $(E_{rs})_{ij} = \delta_{ri}\delta_{sj}$. On obtient

$$(E_{rs}A)_{ij} = \sum_{k=1}^{n}(E_{rs})_{ik}A_{kj} = \sum_{k=1}^{n}\delta_{ri}\delta_{sk}A_{kj} = \delta_{ri}A_{sj}\ ,$$

$$(AE_{rs})_{ij} = \sum_{l=1}^{n}A_{il}(E_{rs})_{lj} = \sum_{l=1}^{n}A_{il}\delta_{rl}\delta_{sj} = A_{ir}\delta_{sj}\ ,$$

et par conséquent $\delta_{ri}A_{sj} = A_{ir}\delta_{sj}$. En prenant $i = r$, on obtient

$$A_{sj} = A_{rr}\delta_{sj}\ .$$

Si $s \neq j$, cela donne $A_{sj} = 0$, et comme cela vaut pour tout $s \neq j$, la matrice A est diagonale. Si $s = j$, cela donne $A_{ss} = A_{rr}$, et comme cela vaut pour tout s et r, la matrice A est scalaire.

La réciproque est évidente (i.e. une matrice scalaire commute avec toute matrice de $M_n(K)$).

Exercice 9. (†) *Soit V un espace vectoriel de dimension finie m sur un corps K et $\phi : V \longrightarrow V$ une application linéaire.*

a) Démontrer qu'il existe un nombre $1 \leq n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{Ker}\,(\phi^{k-1}) = \mathrm{Ker}\,(\phi^k)$ pour tout $k \geq n$.

b) Formuler et démontrer une affirmation similaire pour les images de ϕ^k, $k \in \mathbb{N}$.

c) Montrer par un exemple que l'affirmation a) devient fausse sans l'hypothèse que $\dim(V) < \infty$.

d) Donner un exemple d'un espace vectoriel de dimension infinie et d'une application linéaire $\phi : V \longrightarrow V$ telle que ϕ soit surjective, mais pas bijective.

Solution 9. a) Soit $1 \leq k \in \mathbb{N}$ et $v \in V$. On a $\mathrm{Ker}\,(\phi^{k-1}) \subset \mathrm{Ker}\,(\phi^k)$, car si $\phi^{k-1}(v) = 0$, alors $\phi^k(v) = \phi(\phi^{k-1}(v)) = 0$. Si

$$\mathrm{Ker}\,(\phi) \subset \mathrm{Ker}\,(\phi^2) \subset \cdots \mathrm{Ker}\,(\phi^k) \subset \cdots$$

est une suite strictement croissante de sous-espaces vectoriels de V, alors

$$\dim(\mathrm{Ker}\,(\phi)) < \dim(\mathrm{Ker}\,(\phi^2)) < \cdots < \dim(\mathrm{Ker}\,(\phi^k)) < \ldots$$

ce qui est impossible car $\dim(V) = m < \infty$. Donc la suite croissante des noyaux ne peut pas être strictement croissante et elle doit s'arrêter (en fait la suite peut avoir au plus m termes) et il existe k tel que $\mathrm{Ker}\,(\phi^k) = \mathrm{Ker}\,(\phi^{k+1})$. On montre maintenant par récurrence que $\mathrm{Ker}\,(\phi^n) = \mathrm{Ker}\,(\phi^k)$ pour tout $n > k$.

Pour $n = k + 1$, c'est le cas par hypothèse. Supposons que $\mathrm{Ker}\,(\phi^r) = \mathrm{Ker}\,(\phi^k)$ pour tout $k \leq r \leq n$, et soit $v \in \mathrm{Ker}\,(\phi^{n+1})$. Comme $\phi^{n+1}(v) = 0$, on a que $\phi(v) \in \mathrm{Ker}\,(\phi^n)$. Comme $\mathrm{Ker}\,(\phi^n) = \mathrm{Ker}\,(\phi^{n-1})$, on a aussi $\phi(v) \in \mathrm{Ker}\,(\phi^{n-1})$, et donc $\phi^n(v) = \phi^{n-1}(\phi(v)) = 0$, ce qui montre que $v \in \mathrm{Ker}\,(\phi^n)$. Donc on a montré que $\mathrm{Ker}\,(\phi^{n+1}) \subseteq \mathrm{Ker}\,(\phi^n) \subseteq \mathrm{Ker}\,(\phi^{n+1})$, d'où l'égalité $\mathrm{Ker}\,(\phi^{n+1}) = \mathrm{Ker}\,(\phi^n) = \mathrm{Ker}\,(\phi^k)$. Ceci conclut la preuve de a).

b) On montre qu'il existe $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$ tel que $\mathrm{Im}\,(\phi^{n+1}) = \mathrm{Im}\,(\phi^n)$ pour tout $n \geq k$.

Soit $1 \leq \ell \in \mathbb{N}$ et $v \in \mathrm{Im}\,\phi^\ell$. Il existe $u \in V$ avec $v = \phi^\ell(u)$, alors $v = \phi^{\ell-1}(\phi(u))$, donc $v \in \mathrm{Im}\,(\phi^{\ell-1})$ et $\mathrm{Im}\,(\phi^\ell) \subseteq \mathrm{Im}\,(\phi^{\ell-1})$. On considère la suite d'inclusions de sous-espaces vectoriels :

$$\mathrm{Im}\,(\phi) \supset \mathrm{Im}\,(\phi^2) \supset \cdots \supset \mathrm{Im}\,(\phi^\ell) \cdots\ .$$

Si cette suite est une suite strictement décroissante de sous-espaces vectoriels de V, alors

$$\dim(V) > \dim(\mathrm{Im}\,(\phi)) > \dim(\mathrm{Im}\,(\phi^2)) > \cdots > \dim(\mathrm{Im}\,(\phi^k)) > \ldots$$

ce qui est impossible car $\dim(V) = m < \infty$. Donc la suite décroissante des images ne peut pas être strictement décroissante et elle doit s'arrêter (en fait la suite peut avoir au plus m termes). Ceci prouve qu'il existe un nombre $1 \leq k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{Im}\,(\phi^{k-1}) = \mathrm{Im}\,(\phi^k)$.

Maintenant on montre par récurrence que $\mathrm{Im}\,(\phi^n) = \mathrm{Im}\,(\phi^{k-1})$ pour tout $n \geq k$. On vient de voir que c'est le cas pour $n = k$. Supposons que $\mathrm{Im}\,(\phi^n) = \mathrm{Im}\,(\phi^k)$ pour un certain $n \geq k$. On considère $w \in \mathrm{Im}\,(\phi^{n+1})$. Donc $w = \phi^{n+1}(u)$ pour un certain $u \in V$. Maintenant $\phi^n(u) \in \mathrm{Im}\,(\phi^n) = \mathrm{Im}\,(\phi^{k-1})$ et donc $\phi^n(u) = \phi^{k-1}(z)$ pour un certain $z \in V$ et $w = \phi^{n+1}(u) = \phi^k(z) \in \mathrm{Im}\,(\phi^k) = \mathrm{Im}\,(\phi^{k-1})$. Donc $\mathrm{Im}\,(\phi^{n+1}) = \mathrm{Im}\,(\phi^{k-1})$.

c), d) Considérons $K = \mathbb{C}$, $V = \mathbb{C}[t]$ et ϕ la dérivation des polynômes. On a

$$\begin{aligned} &\mathrm{Ker}\,(\phi) = \mathbb{C} \subsetneq \mathrm{Ker}\,(\phi^2) = \mathbb{C}[t]_{\leq 1} \subsetneq \dots \\ &\subsetneq \mathrm{Ker}\,(\phi^n) = \mathbb{C}[t]_{\leq n-1} \subsetneq \mathrm{Ker}\,(\phi^{n+1}) = \mathbb{C}[t]_{\leq n} \subsetneq \dots \end{aligned}$$

D'autre part, l'application ϕ est évidemment surjective, mais pas injective, car $\mathrm{Ker}\,(\phi) = \mathbb{C}$.

Exercice 10. (†) *Soit K un corps et α, $\beta : K^n \longrightarrow K^n$ deux applications linéaires. Démontrer l'inégalité:*

$$\mathrm{rang}\,(\alpha) + \mathrm{rang}\,(\beta) - n \leq \mathrm{rang}\,(\alpha \circ \beta) \leq \min\{\mathrm{rang}\,(\alpha),\, \mathrm{rang}\,(\beta)\}.$$

Solution 10. On montre d'abord la borne supérieure :

Observons déjà que puisque $\mathrm{Ker}\,(\beta) \subseteq \mathrm{Ker}\,(\alpha\circ\beta)$, $\dim \mathrm{Ker}\,(\beta) \leq \dim \mathrm{Ker}\,(\alpha\circ\beta)$. En utilisant le théorème du rang, nous obtenons $n - \mathrm{rang}\,(\beta) \leq n - \mathrm{rang}\,(\alpha\circ\beta)$, c'est-à-dire $\mathrm{rang}\,(\alpha\circ\beta) \leq \mathrm{rang}\,(\beta)$. De plus,

$$\mathrm{Im}\,(\alpha\circ\beta) = \{\alpha(\beta(x)) \colon x \in K^n\} = \{\alpha(y) \colon y \in \mathrm{Im}\,(\beta)\} \subseteq \{\alpha(y) \colon y \in K^n\} = \mathrm{Im}\,(\alpha).$$

Ainsi $\mathrm{rang}\,(\alpha\circ\beta) \leq \mathrm{rang}\,(\alpha)$ et $\mathrm{rang}\,(\alpha\circ\beta) \leq \mathrm{rang}\,(\beta)$, d'où $\mathrm{rang}\,(\alpha\circ\beta) \leq \min\{\mathrm{rang}\,(\alpha), \mathrm{rang}\,(\beta)\}$, ce qui prouve la borne supérieure.

Pour prouver la borne inférieure, notons $s = \dim \mathrm{Ker}\,(\beta)$ et $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_s\}$ une base de $\mathrm{Ker}\,(\beta)$. Puisque $\mathrm{Ker}\,(\beta) \subseteq \mathrm{Ker}\,(\alpha\circ\beta)$, cette base peut être complétée en une base $\mathcal{B} \cup \mathcal{W}$ de $\mathrm{Ker}\,(\alpha\circ\beta)$ avec $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_t\}$ telle que $\dim \mathrm{Ker}\,(\alpha\circ\beta) = s+t$. Notons $\mathcal{V} = \{\beta(w_1), \dots, \beta(w_t)\}$, $W = \mathrm{Vect}\,(\mathcal{W})$, $V = \mathrm{Vect}\,(\mathcal{V})$ et montrons que $\dim V = t$, c'est-à-dire que $\mathcal{V}$ est linéairement indépendant. En effet, si

$$\sum_{i=1}^{t} \lambda_i \beta(w_i) = \beta(\sum_{i=1}^{t} \lambda_i w_i) = 0$$

alors $\sum_{i=1}^{t} \lambda_i w_i \in \mathrm{Ker}\,(\beta)$ donc $\sum_{i=1}^{t} \lambda_i w_i = \sum_{j=1}^{s} \mu_j u_j$. Mais puisque $\{u_1, \dots, u_s, w_1, \dots, w_t\}$ est une base, $\lambda_i = 0$ et $\mu_j = 0$ pour tout $i = 1, \dots, t$ et tout $j = 1, \dots, s$, ce qui montre que $\mathcal{V}$ est linéairement indépendant.

Puisque $\mathcal{W} \subseteq \mathrm{Ker}\,(\alpha\circ\beta)$, pour $w_i \in \mathcal{W}$, on a $\alpha(\beta(w_i)) = 0$ et donc $\beta(w_i) \in \mathrm{Ker}\,(\alpha)$. On déduit que $V \subseteq \mathrm{Ker}\,(\alpha)$, donc $t = \dim V \leq \dim \mathrm{Ker}\,(\alpha)$. Enfin, nous avons

$$\dim \mathrm{Ker}\,(\alpha\circ\beta) = s + t \leq \dim \mathrm{Ker}\,(\alpha) + \dim \mathrm{Ker}\,(\beta).$$

Finalement, en appliquant le théorème du rang

$$\mathrm{rang}\,(\alpha\circ\beta) = n - \dim \mathrm{Ker}\,(\alpha\circ\beta) \geq n - \dim \mathrm{Ker}\,(\alpha) - \dim \mathrm{Ker}\,(\beta) = \mathrm{rang}\,(\alpha) + \mathrm{rang}\,(\beta) - n.$$

Exercice 11 (Facultatif)**.** *Soit V un K-espace vectoriel de dimension finie et soit $W \subseteq V$ un sous-espace vectoriel. Posons $H = \{\theta \in \mathrm{GL}(V) \mid \theta(W) \subseteq W\}$ (on l'appelle* le stabilisateur dans $GL(V)$ de W*). Montrer que H est un sous-groupe de* $\mathrm{GL}(V)$*. (On rappelle que la loi de composition dans le groupe* $\mathrm{GL}(V)$ *est la composition d'applications.)*

Solution 11. On note que $H \neq \emptyset$ car $\mathrm{id}_V \in H$. Soient maintenant $\theta_1, \theta_2 \in H$ et soit $w \in W$. Alors $(\theta_1 \circ \theta_2) = \theta_1(\theta_2(w))$. Comme $\theta_2 \in H$, $\theta_2(w) \in W$ et comme $\theta_1 \in H$, $\theta_1(\theta_2(w)) \in W$ et on déduit que $\theta_1 \circ \theta_2 \in H$.

Soit $\theta \in H$. Comme W est de dimension finie et θ est bijective (donc injective), on a par le théorème du rang (appliqué à l'application $\theta : W \to W$) que $\dim W = \dim \theta(W)$ et donc $\theta(W) = W$. Maintenant, pour $w \in W$, il existe $u \in W$ avec $\theta(u) = w$. On trouve que $\theta^{-1}(w) = \theta^{-1}(\theta(u)) = u \in W$, ce qui montre que $\theta^{-1}(W) \subset W$ et $\theta^{-1} \in H$ aussi.

Ces deux vérifications montrent que H est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(V)$.
