Corrigé 7

29 octobre

Notation: Soit p un nombre premier. On note $\mathbb{F}_p$ le corps fini à p éléments et écrira simplement a pour $\bar{a}$, pour un élément $\bar{a}$ de $\mathbb{F}_p$.
On fixe un corps K.
On écrira $M_n(K)$ pour $M_{n\times n}(K)$.

A cette série, vous pouvez rendre pour correction l'exercice ??. Il faut le donner à un des assistants de votre salle d'exercices au plus tard lors de la séance d'exercices du 5 novembre.

A cette série il y a deux exercices notés avec $\star$. Ils sont en plus car ils ressemblent à d'autres exercices. Vous pouvez éventuellement les garder pour la période des révisions

Exercice 1. *On considère les sous-espaces vectoriels suivants de $X = M_{2\times 3}(\mathbb{C})$:*

$$U = \{\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \in X \mid a-b = c-d \text{ et } e+f=0\},$$

$$V = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i+1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2+i & 0 & 2+i \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

a) Calculer $\dim(U)$ *et* $\dim(V)$.

b) Trouver $\dim(U \cap V)$.

c) Montrer que $U + V = M_{2\times 3}(\mathbb{C})$.

Solution 1. a) Une matrice $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$ appartient à U si et seulement si $f = -e$ et $d = b + c - a$. Donc U est l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b+c-a & e & -e \end{pmatrix}$. Une telle matrice s'écrit comme la combinaison linéaire

$$a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + e\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

En particulier,

$$S = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\}$$

est une famille génératrice de U.

On vérifie aisément que S est une famille libre et donc $\dim U = 4$.

Pour V, il s'agit d'extraire une base de la famille génératrice donnée.

On cherche d'abord à savoir si les vecteurs donnés sont linéairement indépendants. Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ tels que

$$\alpha\begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} i+1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix} 2+i & 0 & 2+i \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a que $\alpha + \beta(i+1) + \delta(2+i) = 0;\ i\alpha + \beta + \gamma + \delta(2+i) = 0;\ \gamma + \delta = 0;\ \alpha + \delta = 0$. On déduit que $\gamma = \alpha$, $\delta = -\alpha$, et $\beta = \alpha$. Les équations sont alors toutes vérifiées en prenant $\alpha = \beta = \gamma = 1$ et $\delta = -1$. Les vecteurs sont linéairement dépendants et de plus on voit que le 4$^{\text{e}}$ vecteur est la somme des 3 premiers. Donc

$$V = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i+1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

Ensuite, on vérifie que les trois matrices restantes sont linéairement indépendantes et par conséquent $\dim V = 3$.

b) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b+c-a & e & -e \end{pmatrix} \in U$. Alors $A \in V$ si et seulement s'il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ tels que

$$A = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} i+1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ce qui est possible seulement si $e = 0$, ce qui implique $\alpha = 0$ (comparer les composantes $(2,3)$ et $(2,2)$ des deux matrices), et ensuite $b = 0$ (voir la composante $(1,2)$). On a maintenant

$$\begin{pmatrix} a & 0 & c \\ c-a & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta(i+1) & 0 & \beta+\gamma \\ \gamma & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et on déduit que $\beta = 0 = a$ et $c = \gamma$. On vérifie ainsi que $U \cap V = \{\begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{C}\}$. On a $\dim(U \cap V) = 1$.

c) Par la formule pour la dimension d'une somme de deux sous-espaces vectoriels, on a que $\dim(U+V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V) = 4 + 3 - 1 = 6$ et comme $\dim M_{2\times 3}(\mathbb{C}) = 6$, on déduit que $U + V = M_{2\times 3}(\mathbb{C})$.

Exercice 2. *Soit $V = \mathbb{R}[t]_{\leq 3}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel de polynômes à coefficients réels de degré au plus 3.*

(a) Vérifier que $B = \{1-t, t+t^2, 3t-3t^2+t^3, 1-t^2\}$ est une base de V.

(b) Trouver les coordonnées de chacun des vecteurs suivants par rapport à la base B :
$p_1 = 1$, $p_2 = t$, $p_3 = t^2$, $p_4 = t^3$, et $p_5 = a + bt + ct^2 + dt^3$, pour $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Solution 2. (a) En effet, on observe que $(1-t) + (t+t^2) + (1-t^2) = 2$. Ainsi, $1 = \frac{1}{2}2 \in \mathrm{Vect}(B)$. Ensuite on a que $t = 1-(1-t) \in \mathrm{Vect}(B)$ et $t^2 = 1-(1-t^2) \in \mathrm{Vect}(B)$. Finalement, on a $t^3 = (3t-3t^2+t^3)-3t+3t^2 \in \mathrm{Vect}(B)$ et donc a bien que B engendre V. Ensuite, comme $\dim(V) = 4$, on a bien que les vecteurs dans B sont linéairement indépendants.

(b) Pour un vecteur $v \in V$, $v = \lambda_1(1-t) + \lambda_2(t+t^2) + \lambda_3(3t-3t^2+t^3) + \lambda_4(1-t^2)$, nous noterons les coordonnées de v par rapport à la base B comme $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$. On note aussi que si v et w ont coordonnées $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$, respectivement $(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$, alors les coordonnées de $v+w$ sont $(\lambda_1+\mu_1, \lambda_2+\mu_2, \lambda_3+\mu_3, \lambda_4+\mu_4)$.

En utilisant le point (a), on voit que les coordonnées de $v = 1$ sont $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$, celles de $v = t = 1-(1-t)$ sont $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}) + (-1, 0, 0, 0) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$, celles de t^2 sont $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}) + (0, 0, 0, -1) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2})$, et enfin celles de t^3 sont $(0, 0, 1, 0) - 3(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}) + 3(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}) = (3, 0, 1, -3)$.

Et donc, on a que pour $p_5 = a + bt + ct^2 + dt^3$ pour $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, les coordonnées de p_5 sont

$$(\frac{1}{2}(a-b+c) + 3d, \frac{1}{2}(a+b+c), d, \frac{1}{2}(a+b-c) - 3d).$$

Exercice 3. *Soit $V = M_{2\times 3}(\mathbb{F}_2)$.*

(a) Montrer que $\mathrm{Card}(V) = 64$.

(b) (facultatif, un peu plus difficile) *Soit $X \subset V$. Montrer que si X possède plus que 32 éléments, alors* $\mathrm{Vect}(X) = V$.

(c) Déterminer si $\{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\}$ est une famille génératrice de V.

(d) Déterminer si $\{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\}$ est une famille libre dans V.

Solution 3. (a) Soit $M \in V$. Alors on peut écrire $M = (a_1\ a_2\ a_3)$ où $a_i \in \mathbb{F}_2^2$ pour $i = 1, 2, 3$. Comme $\mathrm{Card}(\mathbb{F}_2^2) = 4$. On a $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ choix pour a_1, a_2 et a_3 et donc $\mathrm{Card}(V) = 64$.

(b) Posons $W = \mathrm{Vect}(X)$. Si $W \neq V$, alors $\dim W = d \leq 5$. Comme $\mathrm{Card}(W) = 2^d \leq 2^5 = 32$, on a une contradiction.

(c) Appelons ces éléments $A_1, \dots, A_6$. C'est bien une famille génératrice. Il suffit de montrer que les matrices $E_{11}, E_{12}, E_{13}, E_{21}, E_{22}, E_{23}$, qui forment une base de $M_{2\times 3}(\mathbb{F}_2)$, appartiennent à Vect $(\{A_1, \dots, A_6\})$. On a

$E_{13} = A_5 + A_1$,

$E_{23} = A_4 + A_3$,

$E_{22} = A_1 + A_2 + A_4 + A_3$, et on voit que $E_{13}, E_{23}, E_{22} \in \text{Vect}(\{A_1, \dots, A_6\})$.

Aussi on a $A_5 + A_6 = E_{21} + E_{23}$ et donc

$E_{21} = A_5 + A_6 + E_{23} \in \text{Vect}(\{A_1, \dots, A_6\})$; et $E_{11} + E_{21} = A_1 + A_2 + A_4$, d'où

$E_{11} = A_1 + A_2 + A_4 + E_{21} \in \text{Vect}(\{A_1, \dots, A_6\})$. Enfin, on a $E_{11} + E_{12} + A_1 = E_{22}$ et on conclut comme avant.

(d) Appelons ces éléments $A_1, \dots, A_4$. Si $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{F}_2$ tels que $\sum_{i=1}^4 \lambda_i A_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on a

$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0$, et $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$, donc $\lambda_4 = 0$. En considérant la composante $(1, 3)$ de la matrice, on trouve que $\lambda_1 = 0$.

Aussi $\lambda_2 + \lambda_4 = 0$, car c'est égale à la composante $(2, 3)$ de cette somme. On a trouvé donc que $\lambda_i = 0$ pour tout i, ce qui montre que la famille est libre.

Exercice 4. *Pour chacun des espaces vectoriels suivants, trouver une base et donner la dimension.*

a) Le $\mathbb{C}$-espace vectoriel T des matrices $A = (A_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(\mathbb{C})$ telles que $A_{ij} = A_{ji}$ pour tous $i \neq j$,

b) Le K-espace vectoriel des polynômes $p(t) \in K[t]$ de degré ≤ 3 qui s'annulent en 0 et 1.

c) Le $\mathbb{F}_7$-espace vectoriel $V = \{(x, y, z) \in (\mathbb{F}_7)^3 \mid x + y + 2z = 0 \text{ et } 3y + z = 0\}$.

Solution 4. a) Pour $1 \leq i, j \leq n$, notons E_{ij} la matrice dont le coefficient en position (i, j) vaut 1 et zéro partout ailleurs. On va montrer que la famille

$$\mathcal{B} := \{E_{ii}, E_{jk} + E_{kj} \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j < k \leq n\}$$

est une base de T.

Cette famille est évidemment contenue dans T. Supposons qu'il existe des scalaires A_{ii}, $1 \leq i \leq n$, et A_{jk}, $1 \leq j < k \leq n$, tels que

$$\sum_{i=1}^{n} A_{ii}E_{ii} + \sum_{1\leq j<k\leq n} A_{jk}(E_{jk} + E_{kj}) = 0.$$

Alors comme cette matrice est nulle, tout coefficient s'annule. En position (i, i) pour tout $1 \leq i \leq n$, on trouve $A_{ii} = 0$ et pour tous $1 \leq j < k \leq n$, on trouve $A_{jk} = 0$ en position (j, k). Donc la famille $\mathcal{B}$ est libre. Pour une matrice $A = (A_{ij}) \in T$, on a

$$A = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}E_{ii} + \sum_{1\leq j<k\leq n} A_{jk}(E_{jk} + E_{kj}),$$

car pour tous $1 \leq j < k \leq n$, $A_{jk} = A_{kj}$. Par conséquent, cette famille est génératrice.

On a montré que la famille $\mathcal{B}$ est libre et génératrice dans T, donc elle est une base de T.

La dimension de T est donc $\text{Card}(\mathcal{B}) = n + \binom{n}{2} = n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$.

b) Notons V le sous-espace en question. Soit $f(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3$ avec $a_0, a_1, a_2, a_3 \in K$ un polynôme de degré au plus 3. Il s'annule en 0 et 1 si et seulement si $f(0) = a_0 = 0$ et $f(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0$. Donc $a_0 = 0$ et $a_1 = -a_2 - a_3$. On considère a_2 et a_3 comme des "variables libres". On obtient $-t + t^2$ en posant $a_2 = 1$ et $a_3 = 0$, et on a le polynôme $-t + t^3$ en posant $a_2 = 0$ et $a_3 = 1$. On montre que la famille $\mathcal{A} := \{-t + t^2, -t + t^3\}$ est une base de V. En effet, les deux polynômes $-t + t^2, -t + t^3$ satisfont les conditions et donc appartiennent à V. S'il existe des scalaires $a, b \in K$ tels que $a(-t + t^2) + b(-t + t^3) = 0$, alors $(-a - b)t + at^2 + bt^3 = 0$ et cela implique que $a = b = 0$. Cette famille est donc libre. Pour tout $f(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 \in V$, on sait que $a_0 = 0$ et $a_1 = -a_2 - a_3$. Donc $f(t) = a_2(-t + t^2) + a_3(-t + t^3)$ et cette famille est génératrice. On a montré que $\mathcal{A}$ est libre et génératrice et donc elle est une base de V.

La dimension de V est 2, puisque $\mathcal{A}$ est de cardinal 2.

c) Soit $(x,y,z) \in V$, Alors $3y+z=0$ implique que $z=-3y$ et on remplace z par $-3y$ dans $x+y+2z=0$ et on obtient $x=5y$. On obtient donc que $(x,y,z)=(5y,y,-3y)$ et si on pose $y=1$, on obtient le vecteur $(5,1,-3)=(5,1,4)$, puisque $-3=4\in\mathbb{F}_7$. On montre que le vecteur $(5,1,4)$ engendre V. En effet, il est clair que cet élément appartienne à V. Comme on a vu que tout élément (x,y,z) vérifie $(x,y,z)=(5y,y,4y)=y(5,1,4)$, ce vecteur non nul engendre V. On a montré que $\{(5,1,4)\}$ est une base de V et donc V est de dimension 1.

Exercice 5. $(\star)$ *On considère les sous-espaces vectoriels suivants de* $\mathbb{R}^4$ *:*

$$\begin{aligned} U &= \{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid x-2z+t=0 \ \ et \ \ z+3t=0\},\\ V &= \mathrm{Vect}\big(\ (1,0,0,0),\ (0,-1,0,0),\ (-1,1,0,0),\ (0,0,0,1)\ \big). \end{aligned}$$

a) Calculer $\dim(U)$ *et* $\dim(V)$*.*

b) Montrer que $U+V=\mathbb{R}^4$*.*

c) Trouver $\dim(U\cap V)$ *sans déterminer* $U\cap V$*.*

d) Déterminer $U\cap V$*.*

Solution 5. a) On va trouver une base de U comme suit. Soit $(x,y,z,t)\in U$. Alors $x-2z+t=0$ et $z+3t=0$. La deuxième égalité donne $z=-3t$ et si on remplace z par $-3t$ dans la première, on obtient $x=-7t$. Donc $(x,y,z,t)=(-7t,y,-3t,t)$ et y et t sont des “variables libres”. Si on prend $y=0$ et $t=1$, on obtient le vecteur $v_1=(-7,0,-3,1)$; si on pose $t=0$ et $y=1$, on obtient le vecteur $e_2=(0,1,0,0)$.

On montre que la partie $\mathcal{A}=\{v_1,e_2\}$ est une base de U. Ces deux vecteurs appartiennent clairement à U. On a montré, dans le premier paragraphe, que pour tout $(x,y,z,t)\in U$, on a $(x,y,z,t)=(-7t,y,-3t,t)=t(-7,0,-3,1)+y(0,1,0,0)$. Donc cette partie est génératrice. D'autre part, s'il existe $a,b\in\mathbb{R}$ tels que

$$a(-7,0,-3,1)+b(0,1,0,0)=0\,,$$

alors $a=b=0$. Donc la partie $\mathcal{A}$ est libre. On a ainsi montré que $\mathcal{A}$ est une base de U et donc la dimension de U est 2.

Pour l'espace V, la partie $\mathcal{C}=\{e_1,v_2,v_3,e_4\}$ est une partie génératrice, où $e_1=(1,0,0,0)$, $v_2=(0,-1,0,0)$, $v_3=(-1,1,0,0)$, $e_4=(0,0,0,1)$. On va trouver une base de V en prenant une partie de $\mathcal{C}$. On va montrer que $\mathcal{B}=\{e_1,v_2,v_4\}$ est une base de V. Il est évident que $v_3=-e_1-v_2$ et donc tout élément de $\mathcal{C}$ est engendré par $\mathcal{B}$. Mais comme $\mathcal{C}$ est génératrice de V, il s'ensuit que $\mathcal{B}$ est aussi génératrice de V. Maintenant s'il existe $a,b,c\in\mathbb{R}$ tels que $ae_1+bv_2+ce_4=0$, alors $ae_1+bv_2+ce_4=(a,-b,0,c)$ est le vecteur nul et donc $a=b=c=0$. La partie $\mathcal{B}$ est par conséquent libre. On a montré que c'est une base de V et donc V est de dimension 3.

b) On montre que l'union $\mathcal{A}\cup\mathcal{B}$ trouvée dans a) engendre la base canonique $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$. Evidemment, $e_1,e_4\in\mathcal{A}\cup\mathcal{B}$, $e_2=-v_2$ et $e_3=-\frac{1}{3}(v_1+7e_1-e_4)$. Donc $\mathcal{A}\cup\mathcal{B}$ engendre $\mathbb{R}^4$ et $U+V=\mathbb{R}^4$, puisque $U+V=\mathrm{Vect}\,(\mathcal{A})+\mathrm{Vect}\,(\mathcal{B})=\mathrm{Vect}\,(\mathcal{A}\cup\mathcal{B})=\mathbb{R}^4$.

c) On utilise la formule des dimensions et on obtient

$$\dim(U\cap V)=\dim(U)+\dim(V)-\dim(U+V)=2+3-4=1.$$

d) Il est évident que $e_2\in U\cap V$ et d'après c), $\dim(U\cap V)=1$, donc $U\cap V=\mathrm{Vect}\,(e_2)$.

Exercice 6. *Soit* V *un* K*-espace vectoriel de dimension* 5*. Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont correctes?*

a) Une partie à 6 *éléments est toujours génératrice.*

b) Soient U *et* W *deux sous-espaces vectoriels de* V *tels que* $\dim(U)=3$ *et* $\dim(W)=2$*. Si* $U\cap W=\{0\}$*, alors* $V=U\oplus W$*.*

c) Pour deux sous-espaces vectoriels U *et* W *de* V *avec* $\dim(U)=3$ *et* $\dim(W)=4$*, on a* $\dim(U\cap W)=\ 2$*.*

d) Une partie à 4 *éléments est toujours libre.*

Solution 6. a) Non. Par exemple, soit $v \in \mathbb{R}^5$ un élément non nul et prenons la partie $\{v, 2v, 3v, 4v, 5v, 6v\}$. Cette partie n'est pas génératrice, puisqu'elle est contenue dans $\mathrm{Vect}\,(v)$ qui est un sous-espace propre de $\mathbb{R}^5$ (sous-espace de dimension 1).

b) Oui. En effet, d'après la formule des dimensions,

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W) = 3 + 2 - 0 = 5.$$

Donc $U + W$ est un sous-espace de V de dimension 5, donc il est égal à l'espace entier V. Comme $U \cap W = \{0\}$, on a $V = U + W = U \oplus W$.

c) Non. Par exemple, si $U \subset W$, alors $U \cap W = U$ et donc $\dim(U \cap W) = \dim(U) = 3 \neq 2$.

d) Non. Par exemple, soit $v \in \mathbb{R}^5$ un élément non nul et prenons la partie $\{v, 2v, 3v, 4v\}$. Cette partie n'est pas libre, puisqu'elle est contenue dans $\mathrm{Vect}\,(v)$ qui est un sous-espace de $\mathbb{R}^5$ de dimension 1.

Exercice 7. ($\star$) *Soit V un K-espace vectoriel de dimension 4. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont correctes?*

a) Si $\{v_1, v_2\}$ et $\{v_3, v_4\}$ sont linéairement indépendants, alors $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ le sont aussi.

b) Si U et W sont des sous-espaces vectoriels de dimension 2 de V tels que $V = U + W$, alors $U \cap W = \{0_V\}$.

c) Il existe un sous-ensemble $S \subset V$, composé de 4 éléments linéairement indépendants, mais qui ne forme pas une base de V.

d) Si $K = \mathbb{F}_5$, alors V possède au moins 10 vecteurs distincts et au plus 100 vecteurs distincts.

Solution 7. a) Non. Le plus simple est de prendre un vecteur commun dans les deux ensembles: $\{v_1, v_2\} = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0)\} \subset \mathbb{R}^4$ et $\{v_3, v_4\} = \{1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0)\} \subset \mathbb{R}^4$.

b) Juste, car $V = U + W$ par hypothèse, donc

$$4 = \dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W) = 2 + 2 - \dim(U \cap W),$$

donc $\dim(U \cap W) = 0$. (On peut noter aussi que $V = U \oplus W$ comme $V = U + W$ et $U \cap W = \{0_V\}$.)

c) Impossible, dans tout espace vectoriel de dimension finie n, un ensemble de n vecteurs linéairement indépendants forme une base. (résultat du cours)

d) Soient $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ une base de V. Chaque vecteur s'écrit comme $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4$, pour $\alpha_i \in \mathbb{F}_5$, et pour chaque vecteur les coordonnées sont uniquement déterminées par le vecteur. Donc V possède $5^4 = 625$ vecteurs distincts et l'affirmation est fausse.

Exercice 8.

Soit $p, q \in \mathbb{C}$ et considérons les vecteurs $u = (p, 0, p - q)$, $v = (0, p, q)$ et $w = (1, p, p) \in \mathbb{C}^3$. Laquelle des affirmations suivantes est vraie?

- *Les vecteurs u, v, w sont linéairement dépendants si et seulement si $p = 0$.*
- *Les vecteurs u, v, w sont linéairement dépendants si et seulement si $p = q$.*
- *Les vecteurs u, v, w sont linéairement indépendants si $p \notin \{0, 1\}$ et $q = \mathrm{i}p$.*

Solution 8. La troisième réponse est la bonne. Si $p = 0$, alors $u = -v$, donc les vecteurs sont linéairement dépendants. Si $p = 1$, alors $w = u + v$, et les vecteurs sont linéairement dépendants. Si $p = q$, alors $u + pv - pw = 0$, et les vecteurs sont linéairement dépendants. Pour prouver que les vecteurs u, v, w sont linéairement indépendants si $p \notin \{0, 1\}$ et $q = \mathrm{i}p$, montrons que $\mathrm{Vect}\,(u, v, w) = \mathbb{C}^3$. Si $p \notin \{0, 1\}$ et $q = \mathrm{i}p$, alors $w - u - v = (1 - p, 0, 0)$. Comme $p \neq 1$, on a $1 - p \neq 0$, et donc $(1, 0, 0) \in \mathrm{Vect}\,((u, v, w))$. On a donc aussi $w - (1, 0, 0) = (0, p, p) \in \mathrm{Vect}\,((u, v, w))$. Cela implique que $(0, p, p) - v = (0, 0, p - q) \in \mathrm{Vect}\,((u, v, w))$. Comme $p \neq q$, (car $q = \mathrm{i}p$ et $p \neq 0$) cela implique $(0, 0, 1) \in \mathrm{Vect}\,((u, v, w))$. Finalement, on a $v - q(0, 0, 1) = (0, p, 0) \in \mathrm{Vect}\,((u, v, w))$, et comme $p \neq 0$, $(0, 1, 0) \in \mathrm{Vect}\,((u, v, w))$.

Exercice 9. *Les applications suivantes sont-elles $\mathbb{R}$-linéaires?*

a) $\alpha_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad \alpha_1(x,y,z) = (x+2y-z, 2z+\lambda)$, *où* $\lambda \in \mathbb{R}$ *est fixé.*

b) $\alpha_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \alpha_2(x,y) = (0, xy)$*;*

c) $\alpha_3 : \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad \alpha_3(f) = f(a) + \int_a^b f(x)dx$, *où* $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ *est l'ensemble des fonctions continues de* $[a,b]$ *dans* $\mathbb{R}$.

d) $\alpha_4 : \mathbb{R}[t]_{\leq 4} \to \mathbb{R}[t]_{\leq 4}, \quad \alpha_4(p(t)) = p(t+1) - p(t)$.

Solution 9. a) Si $\lambda = 0$, α_1 est une application linéaire; sinon, elle ne l'est pas.

En effet, si $\lambda = 0$, alors pour $a \in \mathbb{R}$ et $(x,y,z),(x',y',z') \in \mathbb{R}^3$, on a

$$\begin{aligned} \alpha_1(a(x,y,z)+(x',y',z')) &= \alpha_1(ax+x', ay+y', az+z') \\ &= ((ax+x')+2(ay+y')-(az+z'), 2(az+z')) \\ &= a(x+2y-z, 2z) + (x'+2y'-z', 2z') \\ &= a\alpha_1(x,y,z) + \alpha_1(x',y',z'). \end{aligned}$$

Donc si $\lambda = 0$, α_1 est linéaire.

Si $\lambda \neq 0$, alors $\alpha_1(2(x,y,z)) = \alpha_1(2x,2y,2z) = (2x+4y-2z, 4z+\lambda)$, mais

$$2\alpha_1(x,y,z) = (2x+4y-2z, 4z+2\lambda) \neq (2x+4y-2z, 4z+\lambda) = \alpha_1(2(x,y,z)),$$

puisque $4z+2\lambda \neq 4z+\lambda$. Donc α_1 n'est pas linéaire si $\lambda \neq 0$.

b) Non. Par exemple, $\alpha_2(2(1,1)) = \alpha_2(2,2) = (0,4) \neq (0,2) = 2(0,1) = 2\alpha_2(1,1)$.

c) Oui. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f,g \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$. Alors

$$\begin{aligned} \alpha_3(\lambda f+g) &= (\lambda f(a)+g(a)) + \int_a^b(\lambda f(x)+g(x))dx \\ &= \lambda(f(a)+\int_a^b f(x)dx) + (g(a)+\int_a^b g(x)dx) \\ &= \lambda\alpha_3(f)+\alpha_3(g). \end{aligned}$$

d) Oui. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $p(t), q(t) \in \mathbb{R}[t]$. Alors

$$\begin{aligned} \alpha_4(ap(t)+q(t)) &= (ap(t+1)+q(t+1)) - (ap(t)+q(t)) \\ &= a(p(t+1)-p(t)) + (q(t+1)-q(t)) \\ &= a\alpha_4(p(t)) + \alpha_4(q(t)). \end{aligned}$$

Exercice 10 (Vérifications d'un résultat du cours)**.** *Soient V et W des K-espaces vectoriels et soient $\phi : V \to W$ et $\psi : V \to W$ des applications K-linéaires.*

(a) *Montrer que $\phi + \psi$ est une application K-linéaire.*

(b) *Soit $\lambda \in K$. Montrer que $\lambda\phi$ est une application K-linéaire.*

Solution 10. a) Soient $u,v \in V$ et $\mu \in K$. On a $(\phi+\psi)(\mu u+v) = \phi(\mu u+v)+\psi(\mu u+v)$, par la définiton de la somme de ϕ et ψ. Comme ϕ et ψ sont K-linéaires, ce dernier est égal à $\mu\phi(u)+\phi(v)+\mu\psi(u)+\psi(v) = \mu(\phi+\psi)(u)+(\phi+\psi)(v)$, ce qui prouve que $\phi+\psi$ est K-linéaire.

b) La démonstration est pareille.

Exercice 11 (Vérification d'un exemple du cours)**.** *Soit $\varphi : K[t] \to K[t]$ l'application définie par $\varphi(p(t)) = p(t^2)$, c'est-à-dire qu'on a*

$$\varphi(a_0 + \cdots + a_m t^m) = a_0 + a_1 t^2 + \cdots + a_m t^{2m}.$$

Montrer que φ est une application K-linéaire.

Solution 11. Soient $p, q \in K[t]$ et $\lambda \in K$. On a $p = a_0 + a_1 t + \cdots + a_m t^m$ et $q = b_0 + b_1 t + \cdots + b_n t^n$, pour $n, m \in \mathbb{N}$ et $a_i, b_j \in K$. On suppose $n \geq m$.

Alors $\lambda p + q = (\lambda a_0 + b_0) + (\lambda a_1 + b_1)t + \cdots + (\lambda a_m + b_m)t^m + b_{m+1}t^{m+1} + \cdots + b_n t^n$.

Ensuite

$$\varphi(\lambda p + q) = (\lambda a_0 + b_0) + (\lambda a_1 + b_1)t^2 + \cdots + (\lambda a_m + b_m)t^{2m} + b_{m+1}t^{2(m+1)} + \cdots + b_n t^{2n} =$$

$$\lambda a_0 + \lambda a_1 t^2 + \cdots + \lambda a_m t^{2m} + b_0 + b_1 t^2 + \cdots + b_n t^{2n} = \lambda\varphi(p) + \varphi(q).$$

On a donc vérifié que φ est une application K-linéaire.

Exercice 12 (Vérification d'un exemple du cours)**.** *Soit $m \in \mathbb{R}$. On considère l'application $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, la projection orthogonale sur la droite $D: \ y = mx$. Montrer que $\pi(a, b) = (\frac{a+mb}{m^2+1}, \frac{ma+m^2b}{m^2+1})$ pour tous $a, b \in \mathbb{R}$.*

Solution 12. Si $m = 0$, l'application π est la projection orthogonale sur l'axe des abscisses , donc $\pi(a, b) = (a, 0)$ et le résultat est vérifié. Pour le cas $m \neq 0$, on pose la droite D' qui passe par le point (a, b) et qui est perpendiculaire à la droite D. On cherche le point d'intersection de D' et D, ce qui donnera l'image $\pi(a, b)$. La droite D' a pente $-1/m$ et donc son équation est $y - b = -\frac{1}{m}(x - a)$. La formule se déduit ensuite par des calculs simples.

Exercice 13 (Facultatif)**.** *Soit V un K-espace vectoriel avec sous-espaces vectoriels U et W tels que $V = U \oplus W$. On définit une application linéaire $\theta : V \to U$ par $\theta(x + y) = x$, où $x \in U, y \in W$. On note que cette application est bien définie car tout élément de V s'écrit de façon unique comme une somme d'un élément de U et un élément de W.*

a) Montrer que θ est une application K-linéaire.

b) Déterminer $\ker(\theta)$.

c) Déterminer $\mathrm{Im}\,(\theta)$.

d) Montrer que $\theta \circ \theta = \theta$.

On appelle θ la projection sur U le long de W.

Solution 13. (a) On montre que θ est une application K-linéaire. Soit $v_1, v_2 \in V$ et $\lambda \in K$. On a $v_i = u_i + w_i$ pour $u_i \in U$ et $w_i \in W$, pour $i = 1, 2$. Donc $\lambda v_1 + v_2 = \lambda(u_1 + w_1) + (u_2 + w_2) = \lambda u_1 + u_2 + \lambda w_1 + w_2$ et $\lambda u_1 + u_2 \in U$ et $\lambda w_1 + w_2 \in W$. On a que $\theta(\lambda v_1 + v_2) = \theta(\lambda u_1 + u_2 + \lambda w_1 + w_2) = \lambda u_1 + u_2$. Comme $\theta(v_i) = u_i$ pour $i = 1, 2$, on a que $\theta(\lambda v_1 + v_2) = \lambda\theta(v_1) + \theta(v_2)$ et θ est K-linéaire.

(b) Si $v = u + w \in \ker(\theta)$ alors $u = 0$ et par conséquent $v \in W$. De plus on voit que pour tout $x \in W$ on a $\theta(x) = 0$. Donc $\ker(\theta) = W$.

(c) On a par définition que $\mathrm{Im}\,(\theta) \subset U$. Mais aussi pour $u \in U$, $\theta(u) = \theta(u + 0) = u \in \mathrm{Im}\,(\theta)$. Donc $\mathrm{Im}\,(\theta) = U$.

(d) Enfin on prend $v \in V$ et on calcule $\theta(\theta(v))$: On écrit $v = u + w$ pour $u \in U$ et $w \in W$.

On a

$$\theta(\theta(v)) = \theta(\theta(u + w)) = \theta(u) = u = \theta(v).$$

Exercice 14 (Facultatif)**.** *On rappelle que pour V un K-espace vectoriel avec sous-espaces vectoriels V_1 et V_2 qui sont les deux de dimension finie, on a $\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$. Trouver un exemple qui montre que pour trois sous-espaces V_1, V_2, V_3 (de dimension finie) de V, la formule*

$$\dim(V_1 + V_2 + V_3) = \dim V_1 + \dim V_2 + \dim V_3 - \dim(V_1 \cap V_2 \cap V_3)$$

n'est pas valable.

Solution 14. Prenons $V = \mathbb{R}^2$ et $V_1 = \mathrm{Vect}\,((1, 0))$, $V_2 = \mathrm{Vect}\,((1, 1))$ et $V_3 = \mathrm{Vect}\,((0, 1))$. Donc $V_1 \cap V_2 \cap V_3 \subset V_1 \cap V_3 = \{(0, 0)\}$. Donc $\dim(V_1) + \dim(V_2) + \dim(V_3) - \dim(V_1 \cap V_2 \cap V_3) = 1 + 1 + 1 - 0 = 3$. Mais $V_1 + V_2 + V_3$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^2$ et ne peut être de dimension plus grande que 2.
