
Corrigé 5

8 octobre

Notation: Soit p un nombre premier. On note $\mathbb{F}_p$ le corps fini à p éléments et écrira simplement a pour $\bar{a}$, pour un élément $\bar{a}$ de $\mathbb{F}_p$.
On fixe un corps K.
On écrira $M_n(K)$ pour $M_{n\times n}(K)$.

A cette série, vous pouvez rendre pour correction l'exercice 7. Il faut le donner à un des assistants de votre salle d'exercices au plus tard lors de la séance d'exercices du 15 octobre.

Exercice 1. *Parmi les parties suivantes de $\mathbb{R}^4$, préciser lesquelles sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.*

a) $\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid 3x-y-2z+3t=0\}$.

b) $\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid 3x-y-z=0 \text{ et } z-t=1\}$.

c) $\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid x^2-y^2=0\}$.

d) $\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid (x,y,z,t)=(-a+b,\ 2a+3b,\ -2a,\ -b) \text{ pour } a,b\in\mathbb{R}\}$.

Solution 1. a) Notons V la partie en question. On va utiliser le critère des sous-espaces.

Tout d'abord V n'est pas vide car $(0,0,0,0)\in V$.

Si $(x,y,z,t),(x',y',z',t')\in V$, alors $3x-y-2z+3t=0=3x'-y'-2z'+3t'$ et donc

$$3(x+x')-(y+y')-2(z+z')+3(t+t')=(3x-y-2z+3t)+(3x'-y'-2z'+3t')=0.$$

On obtient que $(x+x',y+y',z+z',t+t')\in V$.

Soient $(x,y,z,t)\in V$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. Alors $3x-y-2z+3t=0$ implique que $3\lambda x-\lambda y-2\lambda z+3\lambda t=\lambda(3x-y-2z+3t)=0$ et donc $(\lambda x,\lambda y,\lambda z,\lambda t)\in V$.

On a ainsi vérifié que V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

b) Non, ce n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. Par exemple, $(0,0,0,-1)\in V$, où V est la partie en question, mais $2\cdot(0,0,0,-1)=(0,0,0,-2)\notin V$.

c) Non. Par exemple, $(1,1,0,0)$ et $(1,-1,0,0)$ appartiennent à cette partie, mais pas leur somme $(2,0,0,0)$, puisque $2^2-0^2=4\neq 0$.

d) Oui. Notons V la partie en question. Comme $(0,0,0,0)\in V$ (pour $a=b=0$) , V n'est pas vide.

Si $(x,y,z,t),(x',y',z',t')\in V$, alors il existe $a,b,a',b'\in\mathbb{R}$ tels que $(x,y,z,t)=(-a+b,\ 2a+3b,\ -2a,\ -b)$ et $(x',y',z',t')=(-a'+b',\ 2a'+3b',\ -2a',\ -b')$, et donc

$$\begin{aligned} & (x+x',\ y+y',\ z+z',\ t+t') \\ = & (-a+b,\ 2a+3b,\ -2a,\ -b)+(-a'+b',\ 2a'+3b',\ -2a',\ -b') \\ = & (-(a+a')+(b+b'),\ 2(a+a')+3(b+b'),\ -2(a+a'),\ -(b+b')). \end{aligned}$$

On obtient que $(x+x',y+y',z+z',t+t')\in V$.

Soient $(x,y,z,t)\in V$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. Alors il existe $a,b\in\mathbb{R}$ tel que $(x,y,z,t)=(-a+b,\ 2a+3b,\ -2a,\ -b)$ et donc

$$\lambda\cdot(x,y,z,t)=(-\lambda a+\lambda b,\ 2\lambda a+3\lambda b,\ -2\lambda a,\ -\lambda b)\in V.$$

On a ainsi vérifié que V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

Solution alternative et plus courte: On note que pour $v\in V$, on a $v=a(-1,2,-2,0)+b(1,3,0,-1)$ pour certains $a,b\in\mathbb{R}$. Ceci montre que $V=\mathrm{Vect}\left((-1,2,-2,0),(1,3,0,-1)\right)$, qui est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 2. *Soit $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ vers lui-même. Les sous-ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$?*

a) L'ensemble des fonctions qui sont continues sur l'intervalle $]0,1[$.

b) L'ensemble des fonctions qui s'annulent sur l'intervalle $[0,1]$.

c) L'ensemble des fonctions continues valant 1 en 0.

d) L'ensemble des fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telles que $f(x+2)=f(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

Solution 2. a) Oui. En effet, notons V ce sous-ensemble. Si $f,g\in V$, alors $f+g$ est encore continue sur l'intervalle $]0,1[$ et donc $f+g\in V$. Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. Alors λf est encore continue sur l'intervalle $]0,1[$ et $\lambda f\in V$. Cela montre que V est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

b) Oui. La preuve est similaire à celle de a).

c) Non, si f est une telle fonction, alors $2f$ vaut 2 en 0 et n'appartient pas à ce sous-ensemble.

d) Oui. La preuve est similaire à celle de a).

Exercice 3. *Soit V un K-espace vectoriel avec sous-espaces vectoriels $W_1,W_2\subset V$.*

a) *Démontrer que W_1+W_2 est un sous-espace vectoriel de V.*

b) *Démontrer que $W_1\cap W_2$ est un sous-espace vectoriel de V.*

c) *Donner un exemple dans $V=\mathbb{R}^2$ de sous-espaces vectoriels W_1 et W_2 tels que $W_1\cup W_2$ n'est pas un sous-espace vectoriel de V.*

d) *Donner un exemple dans $V=\mathbb{R}^2$ de sous-espaces vectoriels W_1 et W_2 tels que $W_1\cup W_2$* **est** *un sous-espace vectoriel de V.*

e) *Donner un exemple dans $V=\mathbb{R}^3$ de trois sous-espaces vectoriels W_1,W_2,W_3 tels que le sous-espace $W_1+W_2+W_3$ n'est pas la somme directe des sous-espaces W_1,W_2,W_3.*

f) *Soient $W_1,\dots,W_r$ des sous-espaces vectoriels de V. Montrer que $W_1+\cdots+W_r$ est un sous-espace vectoriel de V.*

Solution 3. a) Comme W_i est non vide pour $i=1,2$, W_1+W_2 est non vide. Soient $x,y\in W_1+W_2$ et $\alpha,\beta\in K$. Donc il existe $w_1,v_1\in W_1$ et $w_2,v_2\in W_2$ tels que $x=w_1+w_2$ et $y=v_1+v_2$. Donc $\alpha x+\beta y=\alpha(w_1+w_2)+\beta(v_1+v_2)=\alpha w_1+\alpha w_2+\beta v_1+\beta v_2=(\alpha w_1+\beta v_1)+(\alpha w_2+\beta v_2)$. Comme W_1 et W_2 sont des sous-espaces vectoriels on a que $\alpha w_1+\beta v_1\in W_1$ et $\alpha w_2+\beta v_2\in W_2$. Donc $\alpha x+\beta y\in W_1+W_2$ et on conclut que W_1+W_2 est un sous-espace vectoriel de V.

b) L'ensemble $W_1\cap W_2$ contient le vecteur nul 0, et donc n'est pas vide. Soient $x,y\in W_1\cap W_2$ et $\alpha,\beta\in K$. Alors $x,y\in W_1$, et le fait que W_1 soit un sous-espace vectoriel implique que $\alpha x+\beta y\in W_1$. De même pour W_2. Donc $\alpha x+\beta y\in W_1\cap W_2$, d'où $W_1\cap W_2$ est un sous-espace vectoriel de V.

c) Prenons $W_1=\{(a,0)\mid a\in\mathbb{R}\}$ et $W_2=\{(0,b)\mid b\in\mathbb{R}\}$. Alors $(1,0),(0,1)\in W_1\cup W_2$, mais $(1,0)+(0,1)=(1,1)$ n'appartient ni à W_1 ni à W_2. Donc $W_1\cup W_2$ n'est pas stable par l'addition et n'est donc pas un sous-espace vectoriel de V.

d) Prenons $W_1=\{(0,0)\}$ et W_2 comme dans l'exemple précédent.

e) Prenons $W_1=\{(a,a,0)\mid a\in\mathbb{R}\}$, $W_2=\{(0,b,b)\mid b\in\mathbb{R}\}$, et $W_3=\mathrm{Vect}\,((2,3,1))$. Alors $W_3\subset W_1+W_2$ et par conséquent $W_1+W_2+W_3$ n'est pas la somme directe des 3 sous-espaces.

f) On rappelle d'abord la définition de l'ensemble $W_1+\cdots+W_r$:

$$W_1+\cdots+W_r=\{x_1+\cdots+x_r\mid x_i\in W_i \text{ pour } 1\le i\le r\}.$$

On note que $W_1+\cdots+W_r$ est non vide car chacun des sous-espaces vectoriels W_i possède l'élément neutre 0 de V et donc $0=0+\cdots+0\in W_1+\cdots+W_r$.

Soient maintenant $u, v \in W_1 + \cdots + W_r$ et $\lambda \in K$. Donc $u = w_1 + \cdots + w_r$ et $v = y_1 + \cdots + y_r$, pour $w_i, y_i \in W_i$, $1 \leq i \leq r$. Donc

$$\begin{aligned}\lambda u + v &= \lambda(w_1 + \cdots + w_r) + (y_1 + \cdots + y_r) \\ &= (\lambda w_1 + y_1) + \cdots + (\lambda w_r + y_r).\end{aligned}$$

Comme W_i est un sous-espace vectoriel pour tout i, on a $\lambda w_i + y_i \in W_i$ pour tout i, et par conséquent $(\lambda w_1 + y_1) + \cdots + (\lambda w_r + y_r) \in W_1 + \cdots + W_r$.

Preuve alternative: Par la partie (a), le résultat est vrai pour $r = 2$ (et pour $r = 1$ par hypothèse). On suppose maintenant que $r > 2$ et que le résultat est vrai pour $r - 1$.

Par cette hypothèse $W_1 + \cdots + W_{r-1}$ est un sous-espace vectoriel de V, appelons-le U. Par définition $W_1 + \cdots + W_r = U + W_r$, et par l'exercice 1, $U + W_r$ est un sous-espace vectoriel de V. Donc par récurrence le résultat est vrai pour tout $r \geq 1$.

Exercice 4. *(a) Dans le $\mathbb{F}_3$-espace vectoriel $M_{2\times3}(\mathbb{F}_3)$, montrer que*

$$\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}2 & 2 & 2\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}\right).$$

(b) Soit $V = \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$. Déterminer si le sous-espace vectoriel $W = \mathrm{Vect}\,(t^2 - 2, t^2 + t, 2t^2 + t + 2)$ est égal à V et pareil pour $U = \mathrm{Vect}\,(t^2 - 2, t^2 + t, 2t^2 + t - 2)$.

(c) Vrai ou faux : $\mathrm{Vect}\,(t^k \mid k \geq 1) = K[t]$.

Solution 4. (a) Posons $A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix}2 & 2 & 2\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix}$, et $E = \begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$, et $U_1 = \mathrm{Vect}\,(A, B, C)$, $U_2 = \mathrm{Vect}\,(D, E)$. On montre les deux inclusions $U_1 \subset U_2$ et $U_2 \subset U_1$. Pour la première inclusion on note que $A = 2D + 2E$, $B = 2D$ et $C = D + 2E$. Donc toute combinaison linéaire de A, B et C appartient à U_2 et nous avons $U_1 \subset U_2$. Pour l'inclusion $U_2 \subset U_1$ on note que $D = 2B$ et $E = 2A + B$ et on conclut comme avant. Les deux inclusions impliquent l'égalité $U_1 = U_2$.

(b) On note que $t^2 - 2 + t^2 + t - (2t^2 + t + 2) = -4 \in W$ et ainsi $1 \in W$. On déduit ensuite que $t^2 - 2 + 2 = t^2 \in W$ et enfin que $t = t^2 + t - t^2 \in W$. Cela suffit pour voir que tout polynôme $at^2 + bt + c \in W$. On a $W = V$.

Pour U, par contre, on montre que le polynôme t n'appartient pas à U; on suppose le contraire et donc il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $a(t^2 - 2) + b(t^2 + t) + c(2t^2 + t - 2) = t$. De cette égalité on déduit que $(a + b + 2c)t^2 + (b + c)t + (-2a - 2c) = t$ et de suite que $a + b + 2c = 0$, $b + c = 1$ et $-2a - 2c = 0$. De la troisième et première équations on a que $b + c = 0$ ce qui contredit la deuxième égalité. Donc $t \notin U$ et $U \neq \mathbb{R}[t]$.

(c) Faux, car les polynômes constants n'appartiennet pas à $\mathrm{Vect}\,(t^k \mid k \geq 1)$.

Exercice 5. *Soient K un corps et $K[t]_{\leq d}$ l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus d à coefficients dans K. Soit $\lambda \in K$ fixé. Soient $U = K[t]_{\leq 2}$ et $V = \{b_1 t + \lambda b_3 t^3 + \lambda^2 b_4 t^4 \mid b_1, b_3, b_4 \in K\}$.*

a) Montrer que U et V sont des sous-espaces vectoriels de $K[t]_{\leq 4}$.

b) Calculer $U \cap V$, $U \cup V$ et $U + V$.

c) Montrer que $U \cup V$ n' est pas un sous-espace vectoriel de $K[t]_{\leq 4}$ sauf pour une valeur spécifique de λ (à trouver).

Solution 5. a) On utilise le critère des sous-espaces.

Les ensembles U et V ne sont pas vides car $0 \in U$ et $0 \in V$.

Pour $f, g \in U = K[t]_{\leq 2}$ et $\mu \in K$, alors f et g sont deux polynômes de degré au plus 2, il en est de même pour leur somme $f + g$ et $\mu \cdot f$. Donc U est un sous-espace vectoriel de $K[t]_{\leq 4}$.

Soient $f, g \in V$ et $\mu \in K$. Alors il existe $b_1, b_3, b_4, b_1', b_3', b_4' \in K$ tels que $f = b_1 t + \lambda b_3 t^3 + \lambda^2 b_4 t^4$ et $g = b_1' t + \lambda b_3' t^3 + \lambda^2 b_4 t^4$. Donc on a $\mu f + g = (\mu b_1 + b_1')t + \lambda(\mu b_3 + b_3')t^3 + \lambda^2(\mu b_4 + b_4')t^4 \in V$. On a montré que V est un sous-espace vectoriel de $K[t]_{\leq 4}$.

b) Supposons que $f \in U \cap V$. Comme $f \in U$, il existe $a_0, a_1, a_2 \in K$ tels que $f = a_0 + a_1t + a_2t^2$ et comme $f \in V$, il existe $b_1, b_3, b_4 \in K$ tel que $f = b_1t + \lambda b_3t^3 + \lambda^2 b_4t^4$. Donc $a_0 + a_1t + a_2t^2 = b_1t + \lambda b_3t^3 + \lambda^2 b_4t^4$ et cela implique que $a_0 = 0, a_1 = b_1, a_2 = 0, \lambda b_3 = 0, \lambda^2 b_4 = 0$. On obtient que $U \cap V = \{a_1t \mid a_1 \in K\}$.

Si $\lambda = 0$, alors $V \subset U$ et $U \cup V = U = K[t]_{\leq 2}$. Si $\lambda \neq 0$, alors

$$U \cup V = K[t]_{\leq 2} \cup \{c_1t + c_3t^3 + c_4t^4 \mid c_1, c_3, c_4 \in K\}.$$

En effet, si $\lambda \neq 0$, alors $c_1t + c_3t^3 + c_4t^4 = c_1t + \lambda(\frac{c_3}{\lambda})t^3 + \lambda^2(\frac{c_4}{\lambda^2})t^4 = b_1 + \lambda b_3t^3 + \lambda^2 b_4t^4$, où $b_1 = c_1$, $b_3 = \frac{c_3}{\lambda}$ et $b_4 = \frac{c_4}{\lambda^2}$. Donc

$$\{b_1t + \lambda b_3t^3 + \lambda^2 b_4t^4 \mid b_1, b_3, b_4 \in K\} = \{c_1t + c_3t^3 + c_4t^4 \mid c_1, c_3, c_4 \in K\}.$$

Si $\lambda = 0$, alors $V \subset U$ et $U + V = \{f + g \mid f \in U, g \in V\} = U = K[t]_{\leq 2}$. Si $\lambda \neq 0$, alors $U + V = K[t]_{\leq 4}$. En effet, on a montré dans le paragraphe précédent que

$$V = \{b_1t + \lambda b_3t^3 + \lambda^2 b_4t^4 \mid b_1, b_3, b_4 \in K\} = \{c_1t + c_3t^3 + c_4t^4 \mid c_1, c_3, c_4 \in K\}.$$

Alors pour tout polynôme de degré ≤ 4, disons $f = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + a_4t^4$, on obtient $f = (a_0 + a_2t^2) + (a_1t + a_3t^3 + a_4t^4) \in U + V$, puisque $a_0 + a_2t^2 \in U$ et $a_1t + a_3t^3 + a_4t^4 \in V$. Donc $K[t]_{\leq 4} \subset U + V$. L'autre inclusion est évidente et l'assertion s'en déduit.

c) Si $\lambda = 0$, alors $U \cup V = U$ est un sous-espace de $K[t]_{\leq 4}$. Si $\lambda \neq 0$, $U \cup V$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $K[t]_{\leq 4}$, car par exemple, si on prend $1 \in U$ et $t + t^3 \in V$, alors leur somme $1 + t + t^3 \notin U \cup V$.

Exercice 6. *a) Une matrice $A = (A_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ est dite scalaire s'il existe $d \in \mathbb{C}$ tel que*

$$A_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j, \\ d & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Montrer que l'ensemble V des matrices scalaires est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{C})$.

b) On définit la trace d'une matrice $A = (A_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ par $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n A_{ii}$. Montrer que l'ensemble W des matrices de trace nulle est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{C})$.

c) Montrer que $M_n(\mathbb{C}) = V \oplus W$.

d) Considérons maintenant l'espace vectoriel $M_3(\mathbb{F}_3)$ et posons V le sous-espace vectoriel des matrices scalaires dans $M_3(\mathbb{F}_3)$ et W le sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{F}_3)$ des matrices à traces nulles. (On admet que ces deux sous-ensembles sont des sous-espaces. Les preuves données pour (a) et (b) ne dépendent pas du corps $\mathbb{C}$.) Montrer que $M_3(\mathbb{F}_3) \neq V \oplus W$.

Solution 6. a) On remarque que la matrice nulle est une matrice scalaire et donc V n'est pas vide. Soient $A = (A_{ij})$ et $B = (B_{ij})$ deux éléments de V et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors il existe $d, d' \in \mathbb{C}$ tels que

$$A_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ d & \text{si } i = j \end{cases} \quad \text{et} \quad B_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ d' & \text{si } i = j \end{cases} .$$

Donc $\lambda \cdot A = (\lambda A_{ij})$ et $A + B = (A_{ij} + B_{ij})$ satisfont

$$\lambda A_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ \lambda d & \text{si } i = j \end{cases} \quad \text{et} \quad A_{ij} + B_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ d + d' & \text{si } i = j \end{cases} .$$

Cela implique que $\lambda \cdot A,\ A + B \in V$. L'ensemble V est par conséquent un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{C})$ par le critère des sous-espaces.

b) On note que W contient la matrice nulle comme la trace de celle-ci est 0. Soient $A = (A_{ij})$ et $B = (B_{ij})$ deux éléments de W et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n A_{ii} = 0$ et $\mathrm{Tr}(B) = \sum_{i=1}^n B_{ii} = 0$. Considérons la trace de la matrice $\lambda \cdot A = (\lambda A_{ij})$ et celle de $A + B = (A_{ij} + B_{ij})$. Donc

$$\mathrm{Tr}(\lambda \cdot A) = \sum_{i=1}^n \lambda A_{ii} = \lambda(\sum_{i=1}^n A_{ii}) = \lambda \mathrm{Tr}(A) = 0$$

et

$$\mathrm{Tr}(A+B) = \sum_{i=1}^{n}(A_{ii}+B_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} A_{ii} + \sum_{i=1}^{n} B_{ii} = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B) = 0.$$

Cela implique que $\lambda \cdot A,\ A+B \in W$. L'ensemble W est par conséquent un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{C})$ par le critère des sous-espaces.

c) Soit $A = (A_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$. On définit $B = \frac{\mathrm{Tr}(A)}{n} \cdot I_n$ et $C = (C_{ij}) = A - B$. Evidemment $B \in V$, et comme

$$C_{ij} = \begin{cases} A_{ij} & \text{si } i \neq j \\ A_{ii} - \frac{\mathrm{Tr}(A)}{n} & \text{si } i = j \end{cases}$$

on a

$$\mathrm{Tr}(C) = \sum_{i=1}^{n}(A_{ii} - \frac{\mathrm{Tr}(A)}{n}) = \sum_{i=1}^{n} A_{ii} - n \times \frac{\mathrm{Tr}(A)}{n} = \mathrm{Tr}(A) - \mathrm{Tr}(A) = 0$$

et donc $C \in W$. On a montré que $A = B + C$ avec $B \in V$ et $C \in W$, et donc $M_n(\mathbb{C}) = V + W$.

On montre maintenant que $V \cap W = \{0\}$. Soit $A = (A_{ij}) \in V \cap W$. Alors par définition, il existe $d \in \mathbb{C}$ tel que

$$A_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ d & \text{si } i = j \end{cases}$$

et $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{ii} = 0$. Mais dans ce cas, pour tout $1 \leq i \leq n$, $A_{ii} = d$ et donc $\mathrm{Tr}(A) = nd = 0$. Cela implique que $d = 0$ et A est réduit à la matrice nulle. On a montré que $V \cap W = \{0\}$ et donc $M_n(\mathbb{C}) = V \oplus W$.

d) Ici $V \cap W$ n'est pas $\{0\}$ car la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in V \cap W$, et donc $V \subseteq W$, d'où $V + W = W \neq M_3(\mathbb{F}_3)$ car par exemple $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \notin W$.

Exercice 7. *Soit $V = U \oplus W$ une somme directe de K-espaces vectoriels avec $W = \mathrm{Vect}\,(w)$, où $w \in W$ est non nul.*

a) Pour chaque $y \in U$, posons $W_y = \mathrm{Vect}\,(y+w)$. Montrer que W_y est un supplémentaire de U dans V.

b) Soit $y' \in U$ et $W_{y'} = \mathrm{Vect}\,(y'+w)$. Montrer que $W_y = W_{y'}$ si et seulement si $y = y'$. (Cela montre que tous les W_y sont différents (lorsque y varie dans U) donc qu'il y a beaucoup de supplémentaires de U dans V.)

Solution 7. a) On doit montrer que $V = U + W_y$ et que $U \cap W_y = \{0\}$. Soit $v \in V$. On peut écrire $v = u + \lambda w$ avec $u \in U$ et $\lambda \in K$. Mais comme on a $w = -y + (y+w)$ et comme $y \in U$, on obtient

$$v = (u - \lambda y) + \lambda(y+w) \in U + \mathrm{Vect}\,(y+w) = U + W_y\,.$$

Donc $V = U + W_y$.

Soit $u \in U \cap W_y$. Comme $u \in W_y$, il existe $a \in K$ tel que $u = a(y+w)$. Alors le vecteur $u - ay = aw$ appartient à la fois à U (car $u, y \in U$) et à W (car $w \in W$). Donc il est nul, car $U \cap W = \{0\}$ (vu que la somme $U \oplus W$ est directe). Ainsi $aw = 0$, et cela implique que $a = 0$, puisque $w \neq 0$. Par conséquent $u = a(y+w) = 0$, si bien que $U \cap W_y = \{0\}$. On a ainsi montré que $V = U \oplus W_y$, donc W_y est un supplémentaire de U dans V.

b) Supposons que $W_y = W_{y'}$. Comme $y' + w \in W_{y'}$, on a $y' + w \in W_y$, donc $y' + w = a(y+w)$, où $a \in K$. Alors le vecteur $y' - ay = -w + aw$ appartient à la fois à U et à W et donc il est nul (car, comme ci-dessus, $U \cap W = \{0\}$ vu que la somme $U \oplus W$ est directe). Ainsi $-w + aw = 0$, donc $(a-1)w = 0$, donc $a - 1 = 0$ car $w \neq 0$, c'est-à-dire $a = 1$. Comme $y' - ay = 0$, il s'ensuit que $y' = ay = y$.

La réciproque est évidente.

Exercice 8. *Soit $K_1 \subset K_2$ deux corps avec les mêmes opérations d'addition et de multiplication. Soit V un K_2-espace vectoriel. On a l'application $f : K_2 \times V \to V$ qui définit la multiplication par scalaire, $f(\alpha, v) = \alpha v$. Montrer que V est aussi un K_1-espace vectoriel où on prend l'addition déjà donnée et avec la multiplication par scalaire donnée par $K_1 \times V \to V$, $(\beta, v) \mapsto f(\beta, v) = \beta v$, c'est-à-dire que l'on restreint la multiplication par scalaire au plus petit corps K_1.*

Solution 8. On sait que $(V,+)$ est un groupe abélien car V est un K_2-espace vectoriel.

Aussi on a une loi de multiplication par scalaire $K_2 \times V \to V$. Cette loi vérifie $(\lambda+\mu)v = \lambda v+\mu v$, $\lambda(u+v) = \lambda u+\lambda v$, $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v$, et $1 \cdot v = v$ pour tout $\lambda, \mu \in K_2$, $u, v \in V$. Comme $K_1 \subset K_2$, ces propriétés sont aussi vérifiées pour la multiplication par scalaire $K_1 \times V \to V$. Ainsi V est un K_1-espace vectoriel. (**voir le prochain exercice pour voir que cette situation n'est pas symétrique.**)

Exercice 9. *Soit* $X = \{\begin{pmatrix} a & ib \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, b, d \in \mathbb{R}\} \subset M_{2\times 2}(\mathbb{C})$. *On définit l'addition usuelle des éléments de* X *(vus comme des éléments du* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel* $M_{2\times 2}(\mathbb{C})$*).*

(a) *Montrer que* X *n'est pas un sous-espace vectoriel de* $M_{2\times 2}(\mathbb{C})$*.*

(b) *Comme dans l'exercice précédent,* $M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ *est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel. Montrer que* X *est un sous-espace vectoriel du* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel* $M_{2\times 2}(\mathbb{C})$*.*

Solution 9. (a) On note que $\begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in X$, mais $i\begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & -1 \\ 0 & i \end{pmatrix} \notin X$. Donc X n'est pas un sous-espace vectoriel du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $M_{2\times 2}(\mathbb{C})$.

(b) La matrice nulle appartient à X, donc X n'est pas vide. Pour $A = \begin{pmatrix} a & ib \\ 0 & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} r & is \\ 0 & t \end{pmatrix}$ dans X, donc avec $a, b, d, r, s, t \in \mathbb{R}$, et pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on a $\alpha A + B = \begin{pmatrix} \alpha a + r & i(\alpha b + s) \\ 0 & \alpha d + t \end{pmatrix}$ qui appartient aussi à X. Donc X est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $M_{2\times 2}(\mathbb{C})$.

La matière des deux exercices suivants sera reprise, utilisée et élaborée dans vos cours d'analyse et de physique. La formule de Moivre sera éventuellement utile aussi dans la résolution d'équations polynomiales dans le cours d'algèbre linéaire avancée II. Par contre, nous n'en aurons pas besoin ce semestre.

Exercice 10. *On considère le point* $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$*. En notant* $r = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$*, la longueur du segment entre* $(0,0)$ *et le point* (x, y)*, et* $\theta = \arctan \frac{y}{x} \in]-\pi, \pi]$ *l'angle entre l'axe des abscisses positives et le vecteur associé au point* (x, y)*, on peut écrire*

$$(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta).$$

Ainsi, on a

$$z = x + \mathrm{i}y = r\cos\theta + \mathrm{i}r\sin\theta = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta),$$

où θ *est défini à* $2k\pi$ *près avec* $k \in \mathbb{Z}$*. On l'appelle la* forme polaire *de* z*. L'angle* $\theta = \mathsf{Arg}(z)$ *est l'argument de* z*.*

Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ *deux nombres complexes, avec* $|z_i| = \rho_i$ *et* $\mathsf{Arg}(z_i) = \varphi_i$ *pour* $i = 1, 2$*.*

(a) Montrer que $|z_1 z_2| = \rho_1\rho_2$*.*

(b) Montrer (en utilisant les identités trigonométriques) que $\mathsf{Arg}(z_1 z_2) = \mathsf{Arg}(z_1) + \mathsf{A}rg(z_2)$*, c'est-à-dire que*

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \rho_1(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1) \cdot \rho_2(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2) \\ &= \rho_1\rho_2\big(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\big). \end{aligned} \tag{1}$$

Remarque

La récurrence sur n peut être utilisée pour établir la *Formule de Moivre*: Pour tous $r > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\big(r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)\big)^n = r^n\big(\cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta)\big).$$

Solution 10. On pose $z_1 = x + y\text{i}$ et $z_2 = a + b\text{i}$ et on vérifie que $(xa - yb)^2 + (xb + ay)^2 = (x^2 + y^2)(a^2 + b^2)$, ce qui montre que $|z_1 z_2|^2 = \rho_1^2 \rho_2^2$ et comme le module est non négatif, on a le résultat.

Pour (b), on rappelle que $\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 = \cos(\varphi_1 + \varphi_2)$ et $\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 + \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 = \sin(\varphi_1 + \varphi_2)$ et en développant des deux côtés de l'égalité, on conclut.

Exercice 11. *La* fonction exponentielle complexe *permet de faire une représentation plus compacte des nombres complexes.*

Définition

Pour $z = x + \text{i}y \in \mathbb{C}$ on définit

$$e^z = \exp(z) := e^x(\cos y + \text{i} \sin y)$$

où e^x est la fonction exponentielle réelle usuelle.

Montrer que $e^{w+z} = e^w \cdot e^z$ pour tous $w, z \in \mathbb{C}$

Solution 11. On pose $w = a + b\text{i}$ et $z = x + y\text{i}$. On a $e^w = e^a(\cos b + \text{i} \sin b)$ et $e^z = e^x(\cos y + \text{i} \sin y)$. Ensuite, on utilise la formule de l'exercice précédent pour le produit de deux nombres complexes écrits sous forme polaire.
