
Corrigé 1

10 septembre 2024

A cette série, vous pouvez rendre pour correction l'exercice 4. Il faut le donner à un des assistants de votre salle d'exercices au plus tard lors de la séance d'exercices du 17 septembre.

Dans cette série et toutes les suivantes, on utilisera les deux notations $A \subset B$ et $A \subseteq B$ pour indiquer qu'une partie A est un sous-ensemble d'une partie B, c'est-à-dire que tout élément de la partie A appartient à la partie B.

Pour une relation R définie sur un ensemble X, on utilisera parfois la notation $x \sim y$ pour dire que $(x, y) \in R$.

Exercice 1. *Soient X et Y deux ensembles non vides et soit $f : X \to Y$ une application. On définit une relation binaire R sur X comme suit: $R = \{(x, y) \in X \times X \mid f(x) = f(y)\}$, c'est-à-dire que pour $x, y \in X$, on a que $x \sim y$ si et seulement si $f(x) = f(y)$. Montrer que R est une relation d'équivalence sur X. Aussi dans le cas particulier où $X = Y = \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec $x \mapsto x^2$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, trouver les classes d'équivalences de $\mathbb{R}$ relatives à cette relation.*

Solution 1. On vérifie les trois propriétés que doit satisfaire une relation d'équivalence.

- Reflexivité: Pour $x \in X$, $f(x) = f(x)$, donc $x \sim x$ et R est reflexive.
- Symétrie: Pour $x, y \in X$, si $x \sim y$ alors $f(x) = f(y)$. Par conséquent, $f(y) = f(x)$ et $y \sim x$. La relation est symétrique.
- Transitivité: Pour $x, y, z \in X$, si $x \sim y$ et $y \sim z$, alors $f(x) = f(y)$ et $f(y) = f(z)$, ce qui implique que $f(x) = f(z)$ et $x \sim z$. La relation est transitive.

Dans le cas particulier, pour $x, y \in \mathbb{R}$, on a que $x \sim y \iff x^2 = y^2$, si et seulement si $x = \pm y$. Donc les classes d'équivalence sont les ensembles de la forme $\{a, -a\}$, pour $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 2. (a) *Donner un exemple d'une relation sur un ensemble X qui est transitive et symétrique, mais non reflexive.*

(b) *Donner un exemple d'une relation sur un ensemble X qui est symétrique et reflexive, mais non transitive.*

Solution 2. (a) On pose $X = \{a, b, c\}$ et on définit une relation $R \subseteq X \times X$ par $R = \{(a, b), (b, a), (a, a), (b, b)\}$. Alors c'est une relation transitive, symétrique et non reflexive.

(b) Soit X l'ensemble des entiers naturels plus grands ou égal à 2. On définit une relation $\sim$ sur X par $a \sim b$ si et seulement si a et b sont divisibles par un même nombre premier p. Par exemple, $4 \sim 10$ car 2 divise les deux nombres. Alors par définition, $a \sim a$ pour tout $a \in X$, car tout nombre naturel est un produit de nombres premiers, et si $a \sim b$ alors $b \sim a$ (car la définition est déjà “symétrique”). Par contre, on a $2 \sim 6$ et $6 \sim 9$, mais $2 \not\sim 9$. Donc la relation n'est pas transitive.

Remarque : Pour les exercices suivants, vous devez faire référence au dossier “Préliminaires” où se trouvent toutes les notions nécessaires.

Exercice 3. *Soit $f : X \to Y$ une application avec X, Y non vides. Parmi les assertions suivantes lesquelles sont correctes?*

a) L'application f est injective s'il existe $x \neq x'$ dans X tels que $f(x) \neq f(x')$.

b) L'application f n'est pas injective s'il existe $x \neq x'$ dans X tels que $f(x) = f(x')$.

c) Si l'application f est injective, alors pour tout $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ est un ensemble à un élément.

d) L'application f est surjective si pour tout $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ n'est pas vide.

e) L'application f est bijective si pour tout $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ est un ensemble à un élément.

Solution 3. a) Non. L'application f est injective si pour **tous** (pas pour certains) $x \neq x'$ dans X, on a $f(x) \neq f(x')$.

b) Oui. C'est la contraposée de la définition de la notion d'injectivité.

c) Non. Pour $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ peut être vide, même si f est injective. Par exemple, l'application exponentielle $f = \exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^x$ est injective, mais pour tout $y \in \mathbb{R}$ négatif, on a $f^{-1}(y) = \emptyset$.

d) Oui. Comme pour tout $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ n'est pas vide, il existe $x \in f^{-1}(y)$, en d'autres termes, $\exists\, x \in X$ tel que $f(x) = y$. Par définition, f est surjective.

e) Oui. Si pour tout $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ est un ensemble à un élément, alors pour tout $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ n'est pas vide et d'après d), f est surjective. Etant donné $x \neq x'$, si $f(x) = f(x')$, alors $f^{-1}(f(x))$ contient x et x' et cela contredit l'hypothèse. Donc f est injective. On a ainsi montré que f est bijective.

Exercice 4. *Soit $f : X \to Y$ une application d'un ensemble X dans un ensemble Y. Soient A et B deux sous-ensembles de X et C et D deux sous-ensembles de Y.*

a) Montrer que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

b) (i) Montrer que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

(ii) Trouver un exemple pour lequel $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$.

(iii) Montrer que si f est injective, alors $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

c) Montrer que $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.

d) Montrer que $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

Solution 4. a) Pour tout $y \in Y$, on a

$$\begin{array}{ll} & y \in f(A \cup B) \\ \Longleftrightarrow & \exists\, x \in A \cup B \text{ tel que } y = f(x) \\ \Longleftrightarrow & \exists\, x \in A \text{ ou } x \in B \text{ tel que } y = f(x) \\ \Longleftrightarrow & y \in f(A) \text{ ou } y \in f(B) \\ \Longleftrightarrow & y \in f(A) \cup f(B), \end{array}$$

ce qui montre que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

b) (i) Comme $A \cap B \subset A$, $f(A \cap B) \subset f(A)$. De même on a $f(A \cap B) \subset f(B)$. Cela entraîne que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

(ii) Par exemple, posons $X = \{1, 2\}$, $Y = \{1\}$, $A = \{1\}$, $B = \{2\}$ et $f(1) = f(2) = 1$. Alors $f(A \cap B) = \emptyset \neq \{1\} = f(A) \cap f(B)$.

(iii) Soit $y \in f(A) \cap f(B)$. Alors il existe $x_1 \in A$ et $x_2 \in B$ tels que $f(x_1) = y = f(x_2)$. Comme f est injective, $x_1 = x_2 \in A \cap B$, ce qui montre que $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$. L'assertion est vraie en combinant ce qui précède et b)(i) .

c) Attention au fait que f^{-1} ne désigne pas une application inverse (qui n'existe pas en général), mais c'est seulement une notation pour l'image réciproque.

Pour tout $x \in X$, on a

$$\begin{array}{llr} & x \in f^{-1}(C \cup D) & \\ \Longleftrightarrow & f(x) \in C \cup D & \text{(par définition de l'image réciproque)} \\ \Longleftrightarrow & f(x) \in C \text{ ou } f(x) \in D & \text{(par définition de la réunion)} \\ \Longleftrightarrow & x \in f^{-1}(C) \text{ ou } x \in f^{-1}(D) & \text{(par définition de l'image réciproque)} \\ \Longleftrightarrow & x \in f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D) & \text{(par définition de la réunion).} \end{array}$$

Ceci montre que $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.

d) Attention au fait que f^{-1} ne désigne pas une application inverse (qui n'existe pas en général), mais c'est seulement une notation pour l'image réciproque.

Pour tout $x \in X$, on a

$$\begin{array}{lll} & x \in f^{-1}(C \cap D) & \\ \iff & f(x) \in C \cap D & \text{(par définition de l'image réciproque)} \\ \iff & f(x) \in C \text{ et } \ f(x) \in D & \text{(par définition de l'intersection)} \\ \iff & x \in f^{-1}(C) \text{ et } x \in f^{-1}(D) & \text{(par définition de l'image réciproque)} \\ \iff & x \in f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D) & \text{(par définition de l'intersection).} \end{array}$$

Ceci montre que $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

Remarque : Pour les parties (a), (c) et (d), vous pouvez aussi montrer deux inclusions séparément pour établir l'égalité des deux ensembles. Parfois, il est plus facile de raisonner ainsi.

Exercice 5. *Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application avec X et Y des ensembles non vides. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont correctes?*

a) f est surjective $\iff \forall V \subset Y,\ f(f^{-1}(V)) = V$.

b) f est injective $\iff \forall U \subset X,\ f^{-1}(f(U)) = U$.

Solution 5. a) Oui. Supposons d'abord que f soit surjective. Par définition, $f^{-1}(V) = \{x \in X \mid f(x) \in V\}$. Donc on a $f(f^{-1}(V)) \subset V$. On montre maintenant que $V \subset f(f^{-1}(V))$. Soit $y \in V$. Comme f est surjective, il existe $x \in X$ tel que $f(x) = y$. Alors $x \in f^{-1}(V)$ et $y = f(x) \in f(f^{-1}(V))$. Comme $y \in V$ était arbitraire, on a $V \subset f(f^{-1}(V))$.

Réciproquement, soit $y \in V$. La condition $f(f^{-1}(V)) = V$ appliquée à $V = \{y\}$ implique la surjectivité de f.

b) Oui. La condition $f^{-1}(f(U)) = U$ appliquée à $U = \{x\}$ donne l'injectivité de f. Supposons réciproquement que f soit injective. Notons que l'inclusion $f^{-1}(f(U)) \supset U$ est toujours vraie, indépendamment de toute condition sur f. Pour montrer l'inclusion opposée, soit $x \in f^{-1}(f(U))$. Alors $f(x) \in f(U)$ et donc il existe $x' \in U$ tel que $f(x) = f(x')$. Mais comme f est injective, cela force $x = x'$, et donc $x \in U$. On a ainsi montré que $f^{-1}(f(U)) \subset U$.
