Corrigé 14

17 décembre

Notation: Soit p un nombre premier. On note $\mathbb{F}_p$ le corps fini à p éléments et écrira simplement a pour $\bar{a}$, pour un élément $\bar{a}$ de $\mathbb{F}_p$.
On fixe un corps K.
On écrira $M_n(K)$ pour $M_{n\times n}(K)$.
Dans cette série et toutes les suivantes, on utilisera les deux notations $A \subset B$ et $A \subseteq B$ pour indiquer qu'une partie A est un sous-ensemble d'une partie B, c'est-à-dire que tout élément de la partie A appartient à la partie B.

Les exercices notés **($\star$)** sont "en plus" car ils ressemblent à d'autres exercices. Vous pouvez éventuellement les garder pour la période des révisions

---

Exercice 1. *On considère l'application de transposition* $\alpha : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ *définie par* $\alpha(A) = A^t \quad \forall A \in M_2(\mathbb{R})$. *Voir l'exercice 2 de la série 13.*

Montrer que α *est diagonalisable.*

Solution 1. On reprend les résultats de la solution de l'exercice 2 de la série 13.

Les 4 vecteurs propres obtenus en (b), à savoir E_{11}, E_{22}, $E_{12}+E_{21}, E_{12}-E_{21}$, forment une base de l'espace entier $M_2(\mathbb{R})$ (vérification facile !). L'existence d'une base formée de vecteurs propres est une caractérisation des transformations linéaires diagonalisables. Donc α est diagonalisable.

Argument alternatif : Le polynôme caractéristique de α est scindé et pour chaque valeur propre, la multiplicité géométrique de la valeur propre est égale à sa multiplicité algébrique.

Exercice 2. *Soit* $b \in \mathbb{R}$ *fixé et* $\alpha : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ *l'application suivante:*

$$\alpha\left(\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y & x \\ (b+1)z - bt & z \end{pmatrix}.$$

On admettra que α *est une application* $\mathbb{R}$*-linéaire.*

a) *Calculer le polynôme caractéristique de* α *et trouver ses valeurs propres.*

b) *Trouver les espaces propres correspondants.*

c) *Déterminer si* α *est diagonalisable. Le cas échéant, trouver une base formée de vecteurs propres et expliciter la formule de changement de base.*

Solution 2. a) Les images des matrices de la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$ sont:

$$\alpha(E_{11}) = E_{12},\ \ \alpha(E_{12}) = E_{11},\ \ \alpha(E_{21}) = (b+1)E_{21} + E_{22},\ \ \alpha(E_{22}) = -bE_{21}$$

de sorte que la matrice de α dans cette base est

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b+1 & -b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On utilise le résultat de l'exercice 2 Série 12 pour calculer $\det(M_\alpha - tI_4)$:

$$\det\begin{pmatrix} -t & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b+1-t & -b \\ 0 & 0 & 1 & -t \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -t & 1 \\ 1 & -t \end{pmatrix}\det\begin{pmatrix} b+1-t & -b \\ 1 & -t \end{pmatrix}$$

$= (t^2-1)(t-b)(t-1) = (t-1)^2(t+1)(t-b)$. Les valeurs propres de α sont donc $1,\ -1$ et b.

b) Supposons d'abord que $b \neq \pm 1$. Les cas de $b = 1$ et $b = -1$ sont couverts dans la partie (c), ci-dessous. Une matrice $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ appartient à l'espace propre E_1 si et seulement si

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x \\ (b+1)z - bt & z \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} x & = y \\ y & = x \\ z & = (b+1)z - bt \\ t & = z \end{cases}$$

Toutes ces relations se ramènent à $x = y$ et $t = z$. On a donc

$$E_1 = \text{Vect}\,(E_{11} + E_{12},\ E_{21} + E_{22}) \quad \text{et} \quad \dim(E_1) = 2.$$

Une matrice $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ appartient à l'espace propre $E_{-1} \Longleftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} -x & -y \\ -z & -t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x \\ (b+1)z - bt & z \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} -x & = y \\ -y & = x \\ -z & = (b+1)z - bt \\ -t & = z \end{cases}$$

Ces relations donnent $x = -y$ et $t = -z = (2b+1)z$. Comme on a supposé que $b \neq -1$, il résulte que $z = t = 0$. Par conséquent $E_{-1} = \text{Vect}\,(E_{11} - E_{12})$. On a donc $\dim(E_{-1}) = 1$.

Enfin, une matrice $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ appartient à l'espace propre E_b si et seulement si

$$\begin{pmatrix} bx & by \\ bz & bt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x \\ (b+1)z - bt & z \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} bx & = y \\ by & = x \\ bz & = (b+1)z - bt \\ bt & = z \end{cases}$$

Les deux premières équations donnent $b^2 x = x$, donc $x = y = 0$, car $b \neq \pm 1$. Les deux dernières impliquent $z = bt$ et avec $z \in \mathbb{R}$ quelconque. En conclusion $E_b = \text{Vect}\,(bE_{21} + E_{22})$, de dimension 1.

c) De ce qui précède il est clair que si $b \neq \pm 1$, alors $c_\alpha(t)$ est scindé et les multiplicités algébriques et géométriques coïncident pour chaque valeur propre. L'application α est diagonalisable. La matrice de passage de la base canonique F à la base $F' = \{E_{11} + E_{12},\ E_{21} + E_{22},\ E_{11} - E_{12},\ bE_{21} + E_{22}\}$ est

$$(\text{id})_{F'}^{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et

$$(\alpha)_{F'} = (\text{id})_{F}^{F'} (\alpha)_F (\text{id})_{F'}^{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Si $b = 1$, on a $c_\alpha(t) = (t-1)^3(t+1)$. Les espaces propres ne changent pas et α n'est **pas** diagonalisable dans ce cas, car $2 = m_{geom}(1) < m_{alg}(1) = 3$.

Si $b = -1$, alors $c_\alpha(t) = (t-1)^2(t+1)^2$. Parcourant l'étude de E_{-1} on constate que la condition $-z = (2b+1)z$ est satisfaite pour tout $z \in \mathbb{R}$, donc $E_{-1} = \text{Vect}\,(E_{11} - E_{12},\ E_{21} - E_{22})$. Dans ce cas $\dim(E_{-1}) = 2$ et

$$m_{geom}(1) = m_{alg}(1) = m_{geom}(-1) = m_{alg}(-1) = 2,$$

donc α est diagonalisable. La matrice de passage de la base canonique F à la base $F'' = \{E_{11} + E_{12},\ E_{21} + E_{22},\ E_{11} - E_{12},\ E_{21} - E_{22}\}$ est

$$\text{id}_{F''}^{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

et on vérifie que $(\mathrm{id})_{\mathrm{F}}^{\mathrm{F}''}(\alpha)_{\mathrm{F}}(\mathrm{id})_{\mathrm{F}''}^{\mathrm{F}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$

Exercice 3. *Pour quelles valeurs de a et b la matrice $M = \begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?*

Solution 3. Le polynôme caractéristique vaut

$$c_M(t) = \det \begin{pmatrix} a+b-t & b \\ -b & a-b-t \end{pmatrix} = (t-a)^2.$$

Donc la seule valeur propre est a. Les vecteurs propres correspondants sont les solutions non nulles du système $(M - a \cdot I_2)X = 0$, ce qui donne

$$\begin{pmatrix} b & b \\ -b & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

autrement dit $b(x+y) = 0$.

Si $b \neq 0$, on trouve $y = -x$ et donc l'espace propre est $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$, de dimension 1. Comme ce sont les seuls vecteurs propres de M, on voit que l'espace entier, qui est de dimension 2, ne peut pas avoir une base formée de vecteurs propres. Donc M n'est pas diagonalisable.

Si $b = 0$, alors le système ci-dessus se réduit à $0 = 0$. Par conséquent, tous les vecteurs $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ sont des solutions, donc des vecteurs propres (pour la valeur propre a). Dans ce cas, il existe une base formée de vecteurs propres (on peut prendre par exemple $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$). Donc M est diagonalisable. En fait, cela saute aux yeux car, si $b = 0$, la matrice M est déjà diagonale.

En résumé, M est diagonalisable si et seulement si $b = 0$ (indépendamment de la valeur de a).

Exercice 4. *(a) Soit $\alpha : V \to V$ une transformation linéaire d'un K-espace vectoriel V. On suppose que V est de dimension 5, que α possède exactement 4 valeurs propres distinctes, et que* $\mathrm{Im}\,(\alpha)$ *est de dimension 3. Montrer que α est diagonalisable.*

(b) Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & & C & \\ 0 & 2 & & & \\ 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & & D & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix} \in M_5(\mathbb{C})$, où $C \in M_{2\times 3}(\mathbb{C})$ et $D \in M_3(\mathbb{C})$. Supposons que $c_A(t) = (t-2)^2t^2(t+1)$ et que $\mathrm{rang}(D) = 2$. *Montrer que A n'est pas diagonalisable.*

Solution 4. (a) Commençons par constater que le polynôme caractéristique $c_\alpha(t)$ est de degré 5 avec 4 racines distinctes, donc il est scindé, l'une des 4 racines est de multiplicité algébrique 2, et les 3 autres sont de multiplicité algébrique 1.

Par le théorème du rang, $\mathrm{Ker}\,(\alpha)$ est de dimension $5 - 3 = 2$. Donc $\lambda_1 = 0$ est une valeur propre de α, avec espace propre correspondant $\mathrm{Ker}\,(\alpha)$, et donc $m_{geom}(0) = \dim(\mathrm{Ker}\,(\alpha)) = 2$. Il s'ensuit que $m_{alg}(0) \geq 2$. Comme toutes les valeurs propres sont de multiplicité algébrique 1, sauf une qui est de multiplicité 2, on doit avoir $m_{alg}(0) = 2$. En particulier $m_{geom}(0) = m_{alg}(0)$.

Par ailleurs α possède 3 autres valeurs propres λ_2, λ_3, λ_4, avec des multiplicités algébriques 1, donc des multiplicités géométriques aussi égales à 1 (car $1 \leq m_{geom}(\lambda_i) \leq m_{alg}(\lambda_i)$). On voit que chaque multiplicité géométrique est égale à la multiplicité algébrique correspondante. Par conséquent, α est diagonalisable.

(b) On note que $(1,0,0,0,0)^t$ et $(0,1,0,0,0)^t$ sont des vecteurs propres linéairement indépendants pour la valeur propre 2 et donc $m_{geom}(2) = m_{alg}(2)$. Pour la valeur propre 0: comme $\mathrm{rang}(D) = 2$, on déduit que $\mathrm{rang}(A) = 4$ et donc $\dim(\ker(A)) = 1$ et $m_{geom}(0) = 1 < 2 = m_{alg}(0)$. Donc A n'est pas diagonalisable.

Exercice 5. *On considère la matrice* $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 5 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Q})$.

a) Montrer que A *est trigonalisable.*

b) Trigonaliser A *en explicitant la formule de changement de base.*

Solution 5. a) Le polynôme caractéristique est

$$c_A(t) = \begin{vmatrix} 2-t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2-t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1-t & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 5-t \end{vmatrix} = (t-2)^2(t-1)(t-3)$$

qui est scindé. Donc A est trigonalisable.

b) En regardant les deux premières colonnes de A, on voit que les deux premiers vecteurs de base e_1 et e_2 sont déjà des vecteurs propres, pour la valeur propre 2. On cherche maintenant des vecteurs propres pour la valeur propre 1. Le système $A - I_4 = 0$ a un espace de solutions de dimension 1, engendré par le vecteur $f_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On prend donc f_3 comme 3ème vecteur de base. Pour obtenir une matrice triangulaire supérieure, on n'a pas besoin de se préoccuper du dernier vecteur de base. On prend donc un 4ème vecteur de base f_4, par exemple $f_4 = e_4$, afin d'obtenir une base $B = (e_1, e_2, f_3, e_4)$. La matrice de changement de base et son inverse sont alors

$$S = (id)_B^C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad (id)_C^B = S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

et la formule de changement de base nous donne

$$B = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

qui est bien triangulaire supérieure.

Exercice 6. *Soit* $A \in M_3(\mathbb{C})$ *une matrice non inversible vérifiant* $\mathrm{Tr}(A) = -2i$ *et* $\mathrm{Tr}(A^2) = 0$.

a) La matrice A *est-elle trigonalisable?*

b) Soient a_1, a_2, a_3 *les valeurs propres de* A*. Exprimer les valeurs propres de* A^2 *en termes de* a_1, a_2, a_3.

c) Déterminer les valeurs propres de A.

d) La matrice A *est-elle diagonalisable?*

Solution 6. a) Comme tout polynôme dans $\mathbb{C}[t]$ est scindé, le polynôme caractéristique de A est scindé, et la matrice A est trigonalisable. Donc il existe une matrice inversible $P \in M_3(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP$ soit triangulaire supérieure.

Une observation importante est la suivante: Pour une matrice triangulaire supérieure avec $a_1, a_2, \cdots, a_n$ sur la diagonale, alors $a_1, a_2, \cdots, a_n$ sont les valeurs propres de cette matrice.

b) Comme A est trigonalisable, on peut trouver une matrice inversible $P \in M_3(\mathbb{C})$ telle que $B := P^{-1}AP$ soit triangulaire supérieure ayant a_1, a_2, a_3 sur la diagonale. Alors $P^{-1}A^2P = P^{-1}APP^{-1}AP = B^2$ et on voit facilement que B^2 est une matrice triangulaire supérieure ayant a_1^2, a_2^2, a_3^2 sur la diagonale. Donc d'après l'observation de a), a_1^2, a_2^2, a_3^2 sont les valeurs propres de A^2. (On rappelle que $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B)$ et $\det(A) = \det(B)$.)

c) Comme A n'est pas inversible, le déterminant de A vaut zéro et donc l'une des valeurs propres est nulle. Sans perte de généralité, on peut supposer que $a_3 = 0$.

Comme $\mathrm{Tr}(A) = -2i$, on obtient $a_1 + a_2 = -2i$; comme $\mathrm{Tr}(A^2) = 0$, d'après b), on obtient $\mathrm{Tr}(A^2) = a_1^2 + a_2^2 = 0$. Il reste à résoudre le système d'équations $\begin{cases} a_1 + a_2 &= -2i \\ a_1^2 + a_2^2 &= 0 \end{cases}$. On obtient que $\begin{cases} a_1 &= -1-i \\ a_2 &= 1-i \end{cases}$ ou $\begin{cases} a_1 &= 1-i \\ a_2 &= -1-i \end{cases}$. Donc les valeurs propres de A sont $\pm 1 - i, 0$.

d) Comme les trois valeurs propres de A sont distinctes, A est diagonalisable.

Exercice 7. *Trouver la matrice des cofacteurs de A et de B (des matrices dans $M_3(K)$) et vérifier dans chaque cas que $A((\mathrm{cof}(A))^t = \det(A)I_3$ et $(\mathrm{cof}(B))^t B = \det(B)I_3$. Soit $a \in K$.*

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ a & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solution 7. On calcule

$$\det A(1|1) = 3,\ \det A(1|2) = a,\ \det A(1|3) = -2a,\ \det A(2|1) = 3,$$

$$\det A(2|2) = a,\ \det A(2|3) = -2a,\ \det A(3|1) = -3,\ \det A(3|2) = -a,\ \det A(3|3) = 2a.$$

Ensuite on reporte ces valeurs dans la matrice des cofacteurs, en mettant aussi le signe approprié.

Par conséquent, $\mathrm{cof}(A) = \begin{pmatrix} 3 & -a & -2a \\ -3 & a & 2a \\ -3 & a & 2a \end{pmatrix}$ et on vérifie que $A \cdot (\mathrm{cof}(A))^t = 0$. On vérifie que $\det(A) = 0$ et donc $A \cdot (\mathrm{cof}(A))^t = \det(A) \cdot I_3$.

Pour B, on calcule

$$\det B(1|1) = 1,\ \det B(1|2) = -2,\ \det B(1|3) = -1,\ \det B(2|1) = 3,$$

$$\det B(2|2) = -4,\ \det B(2|3) = -3,\ \det B(3|1) = 1,\ \det B(3|2) = 2,\ \det B(3|3) = 1,$$

donc $\mathrm{cof}(B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

On vérifie que $(\mathrm{cof}(B))^t B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & -4 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot I_3$ et $\det(B) = 2$.

Exercice 8 (Faites référence à l'exercice 13 de la série 13.)**.** *Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé. On considère la transformation linéaire α de $M_2(\mathbb{R})$ définie par*

$$\alpha \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-a)x + ay & x \\ 2z + t & t \end{pmatrix}.$$

Déterminer si α est diagonalisable. Le cas échéant, trouver une base formée de vecteurs propres et expliciter la formule de changement de base.

Solution 8. Si $a \neq -1, -2$, alors d'après les résultats dans la série précédente, $\dim(E_2) = 1, \dim(E_1) = 2$ et $\dim(E_{-a}) = 1$. Comme $\dim(V) = 4 = 1 + 2 + 1 = \dim(E_2) + \dim(E_1) + \dim(E_{-a})$. Comme la somme des espaces propres de valeurs propres différentes est une somme directe, on en déduit que $V = E_2 \oplus E_1 \oplus E_{-a}$ et donc α est diagonalisable.

Si $a = -1$, $\dim(E_2) = 1, \dim(E_1) = 2$. Par conséquent, $\dim(V) = 4 > 1 + 2 = \dim(E_2) + \dim(E_1)$ et donc α n'est pas diagonalisable.

Si $a = -2$, alors $\dim(E_2) = 2, \dim(E_1) = 2$. Un argument similaire à celui utilisé dans le premier paragraphe montre que α est diagonalisable.

En résumé, α est diagonalisable si et seulement si $a \neq -1$.

Pour la formule de changement de base, on ne donne que les résultats et les calculs sont laissés au lecteur.

Supposons que $a \neq -1, -2$. Alors d'après les résultats de la série précédente $F = (v_2, v_3, v_4, v_5)$ est une base de $V = M_2(\mathbb{R})$. La matrice de changement de base de E à F est $S = (Id)^E_F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Son inverse est $S^{-1} = (Id)^F_E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ \frac{1}{a+1} & \frac{a}{a+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-1}{a+1} & \frac{1}{a+1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$. La formule de changement de base donne

$$\begin{aligned} B &= (\alpha)^F_F = S^{-1}AS \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ \frac{1}{a+1} & \frac{a}{a+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-1}{a+1} & \frac{1}{a+1} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-a & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Supposons que $a = -2$. On a vu que $G = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ est une base de $V = M_2(\mathbb{R})$. La matrice de changement de base de E à G est $S = (Id)^E_G = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Son inverse est $S^{-1} = (Id)^G_E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. La formule de changement de base donne

$$\begin{aligned} B &= (\alpha)^G_G = S^{-1}AS \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercice 9 (Facultatif)**.** *Soient K et F des corps avec $K \subset F$. On considère les espaces vectoriels K^n et F^n. On rappelle que F^n possède une structure de F-espace vectoriel ainsi qu'une structure de K-espace vectoriel. Soit $(v_1, \ldots, v_n)$ une base du K-espace vectoriel K^n. Alors $v_i \in F^n$ pour tout i. Montrer que $(v_1, \ldots, v_n)$ est une base du F-espace vectoriel F^n.*

Solution 9. Soit $C = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de K^n, qui est aussi une base de F^n. On considère l'application linéaire $\phi : K^n \to K^n$ définit par $\phi(e_i) = v_i$. Soit $A = (\phi)^C_C \in M_n(K)$.

Comme ϕ envoie la base C sur une base de K^n, ϕ est bijective. Par le critère d'inversibilité on a que A est une matrice inversible et donc $\det(A) \neq 0$.

Maintenant soit $\psi : F^n \to F^n$ l'application linéaire dont la matrice $(\psi)^C_C = A$. On déduit que ψ est bijective par les mêmes critères et par conséquent $(v_1, \ldots, v_n)$ est une base de F^n aussi.

Exercice 10 (Facultatif)**.** *Soient K un corps, $A \in M_n(K)$ et $B, X \in M_{n\times 1}(K)$. On considère le système linéaire $AX = B$.*

On suppose que $\det(A) \neq 0$, auquel cas le système linéaire possède une solution unique. On donne ici une formule pour l'unique solution en termes des déterminants de certaines matrices.

Soit $S \in M_{n\times 1}(K)$ l'unique solution du système et écrivons $S^t = (s_1\ s_2\ \ldots\ s_n)$.

a) A l'aide de S, exprimer B comme combinaison linéaire des colonnes de A.

b) *Pour $1 \leq k \leq n$, désignons par C_k la matrice obtenue à partir de A en remplaçant la k-ème colonne de A par la colonne B. Montrer la* **formule de Cramer**

$$s_k = \frac{\det(C_k)}{\det(A)} \qquad (k = 1, \dots, n).$$

Notons que cette formule est intéressante du point de vue théorique, mais est très peu utilisable pour les calculs.

Solution 10. a) Comme S est la solution du système, $AS = B$, donc $a_{i1}s_1 + a_{i2}s_2 + \ldots + a_{in}s_n = b_i$ pour chaque $i = 1, \dots, n$. En désignant par A^j la j-ème colonne de A, cela donne $A^1 s_1 + \ldots + A^n s_n = B$. Ainsi $B = \sum_{j=1}^n s_j A^j$.

b) Par définition, la matrice C_k vaut

$$C_k = (A^1, \cdots, A^{k-1}, B, A^{k+1}, \cdots A^n)$$

où A^j désigne la j-ème colonne de A. La k-ème colonne B peut s'écrire comme la combinaison linéaire obtenue en (b), à savoir $B = \sum_{j=1}^n s_j A^j$. On développe alors le déterminant par linéarité par rapport à la k-ème colonne et on obtient

$$\det(C_k) = \sum_{j=1}^{n} s_j \ \det(A^1, \cdots, A^{k-1}, A^j, A^{k+1}, \cdots, A^n)\,.$$

On voit que, si $j \neq k$, deux colonnes sont égales et le déterminant est donc nul. Il ne reste alors que le terme pour $j = k$ et on obtient

$$\det(C_k) = s_k \ \det(A^1, \cdots, A^{k-1}, A^k, A^{k+1}, \cdots, A^n) = s_k \ \det(A)\,.$$

On trouve alors s_k en divisant par $\det(A)$, qui est différent de 0.

Exercice 11 ($\star$)**.** *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ fixés et $n \geq 2$.*
On considère la matrice $A = (A_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$ avec

$$A_{ij} = \begin{cases} a & \text{si } i = j, \\ b & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

a) *Montrer que $a - b$ est une valeur propre de A et trouver l'espace propre correspondant.*

b) *Montrer que le vecteur $(1, 1, \cdots, 1)$ est un vecteur propre. Pour quelle valeur propre?*

c) *Montrer que A est diagonalisable.*

d) *Trouver une base formée de vecteurs propres, et quand $n = 3$, expliciter la formule de changement de base.*

Solution 11. a) Le scalaire $a - b$ est une valeur propre de A si et seulement si la matrice $A - (a - b) \cdot I_n$ n'est pas inversible si et seulement si $\det(A - (a - b) \cdot I_n) = 0$. Or, par défintion de A, on voit que $A - (a - b) \cdot I_n$ est la matrice dont tous les coefficients sont b, donc est de déterminant nul. Par conséquent, $a - b$ en est une valeur propre.

L'espace propre associé à la valeur propre $a - b$ est le noyau de $A - (a - b) \cdot I_n$. On distingue deux cas.

Si $b = 0$, alors $A - (a - b) \cdot I_n$ est la matrice nulle, donc $E_{a-b} = V = \mathbb{R}^n$, l'espace entier. La base canonique de $V = \mathbb{R}^n$ en est une base.

Si $b \neq 0$, on effectue les opérations élémentaires suivantes sur les lignes de $A - (a - b) \cdot I_n$:

$$D_1(\frac{1}{b}), L_{21}(-b), L_{31}(-b), \cdots, L_{n1}(-b)$$

et on obtient une matrice échelonnée réduite: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Donc $x_2, \cdots, x_n$ sont les variables libres et l'espace propre E_{a-b} est de dimension $n - 1$. Plus précisément,

$$E_{a-b} = \{(-x_2 - x_3 - \cdots - x_n, x_2, x_3, \cdots, x_n) \mid x_2, x_3, \cdots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

Une base de E_{a-b} est donnée par

$$((-1, 1, 0, 0, \cdots, 0), (-1, 0, 1, 0, \cdots, 0), \cdots, (-1, 0, 0, \cdots, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, \cdots, 0, 1)).$$

b) Notons $v=(1,1,\cdots,1)$ le vecteur qui vaut 1 partout. Soit E la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Alors $w=(v)_E=\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$.

Un simple calcul donne $Aw=(a+(n-1)b)w$. Donc $a+(n-1)b$ est une valeur propre de A et v est un vecteur propre associé à cette valeur propre. Donc $\dim(E_{a+(n-1)b})\geq 1$.

Constatons que si $b\neq 0$, $a+(n-1)b\neq a-b$ et ces deux valeurs propres sont distinctes.

c) Si $b=0$, la matrice $A=aI_n$ qui est une matrice diagonale, qui est bien sûr diagonalisable.

On peut aussi remarquer que l'on a trouvé une base formée de vecteurs propres lorsque $b=0$, donc A est diagonalisable.

Si $b\neq 0$, alors d'après a), $a-b$ est une valeur propre de A et E_{a-b} est de dimension $n-1$; d'après b), $a+(n-1)b$ est une autre valeur propre et l'espace propre correspondant est de dimension au moins 1. Comme la somme d'espaces propres associés à des valeurs propres différentes est une somme directe, la somme directe de E_{a-b} et de $E_{a+(n-1)b}$ est de dimension $\geq (n-1)+1=n$. Donc $V=E_{a-b}\oplus E_{a+(n-1)b}$. Par conséquent, A est diagonalisable lorsque $b\neq 0$. Constatons que cela montre aussi que $\dim(E_{a+(n-1)b})=1$.

En résumé, dans les deux cas, A est diagonalisable.

d) Si $b=0$, d'après c), la base canonique $F:=E$ est une base formée de vecteurs propres.

Si $b\neq 0$, une base formée de vecteurs propres est donnée par l'union d'une base de E_{a-b} et d'une base de $E_{a+(n-1)b}$, par exemple, on peut prendre

$$F:=((-1,1,0,\cdots,0,0),(-1,0,1,\cdots,0,0),\cdots,(-1,0,0,\cdots,1,0),(-1,0,0,\cdots,0,1),(1,1,1,\cdots,1,1)).$$

Supposons maintenant que $n=3$. On note α la transformation linéaire de $V=\mathbb{R}^n$ définie par A par rapport à la base canonique E.

Si $b=0$, alors $F=E$. Donc la matrice de changement de base de E à F ainsi que celle de F à E sont la matrice identité et la formule de changement de base donne

$$B=(\alpha)_F^F=(Id)_E^F\cdot A\cdot(Id)_F^E=I_n\cdot A\cdot I_n=A.$$

Si $b\neq 0$, alors $F=((-1,1,0),(-1,0,1),(1,1,1))$. Donc $S=(Id)_F^E=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$. et $S^{-1}=(Id)_E^F=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$. La formule de changement de base donne

$$\begin{aligned}B&=(\alpha)_F^F=S^{-1}AS\\&=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b&b\\b&a&b\\b&b&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&-1&1\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}a-b&0&0\\0&a-b&0\\0&0&a+2b\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Exercice 12. ($\star$)

Soit $V=\mathbb{C}[t]_{\leq 3}$ *et* $\alpha:V\longrightarrow V$ *définie par*

$$\alpha(P(t))=P(t)-(t+1)P'(t).$$

Déterminer les valeurs propres de α *et les espaces propres correspondants en indiquant une base pour chacun. L'application* α *est-elle diagonalisable?*

Solution 12. Soit $F = \{1, t, t^2, t^3\}$ la base canonique de $\mathbb{C}[t]_{\leq 3}$. On calcule

$$\begin{cases} \alpha(1) & = 1 \\ \alpha(t) & = t - (t+1) = -1 \\ \alpha(t^2) & = t^2 - (t+1)2t = -t^2 - 2t \\ \alpha(t^3) & = t^3 - (t+1)3t^2 = -2t^3 - 3t^2 \end{cases}$$

donc la matrice de α par rapport à la base F est

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

On a $c_\alpha(t) = \det(M_\alpha - tI_4) = t(t-1)(t+1)(t+2)$. On note que ce polynôme est scindé. Les valeurs propres sont donc 0, 1, -1 et -2. Il y a 4 valeurs propres distinctes, dont les multiplicités géométriques et algébriques sont forcément égales et par conséquent α est diagonalisable.

Pour étudier les espaces propres, écrivons $P(t) = a + bt + ct^2 + dt^3$, avec $a, b, c, d \in \mathbb{C}$.

Calcul de $E_0 = \mathrm{Ker}\,(\alpha)$. On a $P(t) \in \mathrm{Ker}\,(\alpha) \iff$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a - b & = 0 \\ -2c & = 0 \\ -c - 3d & = 0 \\ -2d & = 0 \end{cases}$$

ce qui donne $c = d = 0$ et $a = b$. Par conséquent $\mathrm{Ker}\,(\alpha) = \mathrm{Vect}\,(1 + t)$.

On procède de manière similaire pour les autres valeurs propres. Les coordonnées des vecteurs de E_1 satisfont le système:

$$\begin{cases} a - b & = a \\ -2c & = b \\ -c - 3d & = c \\ -2d & = d \end{cases}$$

d'où $d = c = b = 0$ et $E_1 = \mathrm{Vect}\,(1)$.

Pour E_{-1} on obtient le système

$$\begin{cases} a - b & = -a \\ -2c & = -b \\ -c - 3d & = -c \\ -2d & = -d \end{cases}$$

avec les solutions $d = 0$, $a = c \in \mathbb{C}$, $b = 2a$, donc $E_{-1} = \mathrm{Vect}\,(1 + 2t + t^2)$.

Finalement, pour E_{-2} on a

$$\begin{cases} a - b & = -2a \\ -2c & = -2b \\ -c - 3d & = -2c \\ -2d & = -2d \end{cases}$$

avec comme solutions $a = d \in \mathbb{C}$, $b = c = 3a$, donc $E_{-2} = \mathrm{Vect}\,(1 + 3t + 3t^2 + t^3) = \mathrm{Vect}\,((1+t)^3)$.

Notons par $F' = \{t + 1, 1, 1 + 2t + t^2, 1 + 3t + 3t^2 + t^3\}$. Nous avons

$$S = (id_V)^F_{F'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice de α par rapport à la base F' est

$$S^{-1}(\alpha)^F_F S = M'_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 13 (Cet exercice complète une preuve du cours)**.** *Soient $W_1, \ldots, W_r$ des sous-espaces vectoriels d'un K-espace vectoriel V tels que $W_1 + \cdots + W_r = W_1 \oplus \cdots \oplus W_r$. Soit B_i une base de W_i, pour $1 \leq i \leq r$. Montrer que la réunion $B = B_1 \cup \cdots \cup B_r$ est une base de $W_1 + \cdots + W_r$.*

Solution 13. Posons $W = W_1 + \cdots + W_r$. Soit $w \in W$, donc il existe $w_i \in W_i$ tels que $w = \sum_{i=1}^{r} w_i$. Pour chaque i, $w_i \in \operatorname{Vect}(B_i)$ et donc $w \in \operatorname{Vect}(B_1 \cup \cdots \cup B_r)$, ce qui montre que B est une partie génératrice de W.

Il reste à montrer que B est une partie libre. On fixe $B_i = \{f_{i1}, \ldots, f_{im_i}\}$, pour chaque i. Soient $\alpha_{ik} \in K$, $1 \leq i \leq r$ et $1 \leq k \leq m_i$, tels que $\sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{m_i} \alpha_{ik} f_{ik} = 0_V$. Fixons j : On a

$$\sum_{k=1}^{m_j} \alpha_{jk} f_{jk} = -\Big(\sum_{i=1, i \neq j}^{r} \Big(\sum_{k=1}^{m_i} \alpha_{ik} f_{ik} \Big) \Big).$$

Ce vecteur appartient à $W_j \cap (W_1 + \cdots + W_{j-1} + W_{j+1} + \cdots + W_r)$. Comme W est une somme directe des W_i, cette intersection est le vecteur nul. Donc $\sum_{k=1}^{m_j} \alpha_{jk} f_{jk} = 0_V$ et par l'indépendance linéaire de B_j, on trouve que $\alpha_{jk} = 0$ pour tout $1 \leq k \leq m_j$. Le choix de j étant arbitraire, on a que $\alpha_{jk} = 0$ pour tout j et pour tout k, ce qui montre que B est une partie libre de W et donc une base de W.
