Corrigé 13

10 décembre

Notation: Soit p un nombre premier. On note $\mathbb{F}_p$ le corps fini à p éléments et écrira simplement a pour $\bar{a}$, pour un élément $\bar{a}$ de $\mathbb{F}_p$.
On fixe un corps K.
On écrira $M_n(K)$ pour $M_{n\times n}(K)$.
Dans cette série et toutes les suivantes, on utilisera les deux notations $A \subset B$ et $A \subseteq B$ pour indiquer qu'une partie A est un sous-ensemble d'une partie B, c'est-à-dire que tout élément de la partie A appartient à la partie B.

Les exercices notés $(\star)$ sont "en plus" car ils ressemblent à d'autres exercices. Vous pouvez éventuellement les garder pour la période des révisions

---

L'exercice noté avec (†) est un peu plus difficile.

Exercice 1. *Dans chacun des cas suivants, calculer le polynôme caractéristique de $\alpha : V \to V$. Calculer la multiplicité algébrique et la multiplicité géométrique de chaque valeur propre de α.*

a) $V = \mathbb{R}^2, \quad \alpha(x, y) = (2x + y,\ -y)$.

b) $V = \mathbb{R}^2, \quad \alpha(x, y) = (x + y,\ -x + y)$.

c) $V = \mathbb{C}^2, \quad \alpha(x, y) = (x + y,\ -x + y)$.

d) $V = M_2(\mathbb{R}), \quad \alpha\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -2d \\ -a & -b \end{pmatrix}$.

Solution 1. a) La matrice de α par rapport à la base canonique E de $V = \mathbb{R}^2$ est $A = (\alpha)_E^E = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Le polynôme caractéristique de α est

$$\det(A - t \cdot I_2) = \begin{vmatrix} 2-t & 1 \\ 0 & -1-t \end{vmatrix} = (t-2)(t+1).$$

Donc les valeurs propres de α sont -1 et 2. La multiplicité algébrique de -1 vaut 1 et celle de 2 est aussi 1.

L'espace propre E_{-1} est le noyau de $\alpha - (-1)\cdot \mathrm{id}$. On résout le système homogène associé à la matrice de coefficients $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Donc $E_{-1} = \{(x, -3x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ et $f_1 = (1, -3)$ forme une base de E_{-1}. On obtient aussi que la multiplicité géométrique de -1, qui est la dimension de E_{-1}, vaut 1.

L'espace propre E_2 est le noyau de $A - 2\cdot I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$. Donc $E_2 = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ et $f_2 = (1, 0)$ forme une base de E_2. On obtient aussi que la multiplicité géométrique de 2, qui est la dimension de E_2, vaut 1.

b) La matrice de α par rapport à la base canonique E de $V = \mathbb{R}^2$ est $A = (\alpha)_E^E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Le polynôme caractéristique de α est $\det(A - t\cdot I_2) = \begin{vmatrix} 1-t & 1 \\ -1 & 1-t \end{vmatrix} = t^2 - 2t + 2$. Ce polynôme n'a pas de racine dans $\mathbb{R}$, donc il n'existe pas de valeur propre pour α.

c) La matrice de α par rapport à la base canonique E de $V = \mathbb{C}^2$ est $A = (\alpha)_E^E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Le polynôme caractéristique de α est $\det(A - t\cdot I_2) = \begin{vmatrix} 1-t & 1 \\ -1 & 1-t \end{vmatrix} = t^2 - 2t + 2$. Donc les valeurs propres de α sont $1 \pm i$. La multiplicité algébrique de $1+i$ vaut 1 et celle de $1-i$ est aussi 1.

L'espace propre E_{1+i} est le noyau de $\alpha - (1+i)\cdot \mathrm{id}$. On résout le système homogène associé à la matrice de coefficients $\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}$. Donc $E_{1+i} = \{(-iy, y) \mid y \in \mathbb{C}\}$ et $f_1 = (-i, 1)$ forme une base de E_{1+i}. On obtient aussi que la multiplicité géométrique de $1+i$, qui est la dimension de E_{1+i}, vaut 1.

L'espace propre E_{1-i} est le noyau de $\alpha - (1-i)\cdot \mathrm{id}$; on résout le système homogène associé à la matrice de coefficients $\begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix}$. Donc $E_{1-i} = \{(iy, y) \mid y \in \mathbb{C}\}$ et $f_2 = (i, 1)$ forme une base de E_{1-i}. On obtient aussi que la multiplicité géométrique de $1-i$, qui est la dimension de E_{1-i}, vaut 1.

d) Soit $E = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ la base canonique de $V = M_2(\mathbb{R})$. Alors la matrice de α par rapport à la base E est $A = (\alpha)_E^E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Le polynôme caractéristique de α est

$$\det(A - t\cdot I_2) = \begin{vmatrix} -t & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -t & 0 & -2 \\ -1 & 0 & -t & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -t \end{vmatrix} = (t-\sqrt{2})(t+\sqrt{2})(t^2+1).$$

Comme t^2+1 n'a pas de racine dans $\mathbb{R}$, les valeurs propres de α sont $\pm\sqrt{2}$. La multiplicité algébrique de $\sqrt{2}$ vaut 1 et celle de $-\sqrt{2}$ est aussi 1.

L'espace propre $E_{\sqrt{2}}$ est le noyau de $\alpha - \sqrt{2}\cdot \mathrm{id}$. On résout le système homogène associé à la matrice de coefficients $\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & -2 \\ -1 & 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$. Donc $E_{\sqrt{2}} = \mathrm{Vect}\left((0, -\sqrt{2}, 0, 1)\right)$. On obtient aussi que la multiplicité géométrique de $\sqrt{2}$, qui est la dimension de $E_{\sqrt{2}}$, vaut 1.

L'espace propre $E_{-\sqrt{2}}$ est le noyau de $\alpha - (-\sqrt{2})\cdot \mathrm{id}$. Comme avant on considère le système homogène associé à la matrice $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & -2 \\ -1 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$. Donc $E_{-\sqrt{2}} = \mathrm{Vect}\left((0, \sqrt{2}, 0, 1)\right)$. On obtient aussi que la multiplicité géométrique de $-\sqrt{2}$, qui est la dimension de $E_{-\sqrt{2}}$, vaut 1.

Remarque: Noter que pour les parties (a) et (c), on aurait pu déterminer les multiplicités géométriques de chacune des valeurs propres, sans faire de calculs. On sait que la somme des multiplicités géométriques est au plus la dimension de l'espace et que chaque multiplicité géométrique est au moins 1. Du coup on déduit que chaque multiplicité géométrique (dans les deux cas (a) et (c)) est égale à 1.

Exercice 2. *On considère l'application de transposition* $\alpha : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ *définie par* $\alpha(A) = A^t \quad \forall A \in M_2(\mathbb{R})$.

a) Déterminer la matrice de α *par rapport à la base canonique de* $M_2(\mathbb{R})$ *et calculer ses valeurs propres.*

b) Déterminer les espaces propres correspondant à chaque valeur propre et trouver une base de chaque espace propre.

Solution 2. a) Comme $\alpha(E_{ij}) = E_{ji}$, pour $1 \le i, j \le 2$, la matrice de α dans la base $C = (E_{11}, E_{21}, E_{12}, E_{22})$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour trouver le polynôme caractéristique de α, on développe le déterminant par rapport à la première ligne et aussi par rapport à la dernière ligne, et on trouve

$$c_\alpha(t) = \det(A - t{\cdot}I_4) = \begin{vmatrix} 1-t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -t & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-t \end{vmatrix} = (t-1)^3(t+1)\,.$$

Ce polynôme admet les racines 1 et -1, qui sont les valeurs propres de α.

b) L'espace propre correspondant à la valeur propre 1 est l'espace des matrices dites “symétriques”, car $\alpha(A) = 1 \cdot A$ si et seulement si $A^t = A$. C'est aussi le noyau de $\alpha - \mathrm{id}$, qui s'obtient en résolvant le système $(A - I_4)X = 0$, c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{donc} \qquad \begin{cases} 0 = 0 \\ -y + z = 0 \\ y - z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Les inconnues x, z, t sont libres et y est l'unique inconnue principale. Une base de l'espace des solutions est alors

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc une base du noyau de $\alpha - \mathrm{id}$ est formée du 1er vecteur de la base, du 4ème, et de la somme des 2ème et 3ème. Ainsi l'espace propre correspondant à la valeur propre 1 est $\mathrm{Vect}\,(E_{11},\, E_{22},\, E_{12} + E_{21})$, de dimension 3.

L'espace propre correspondant à la valeur propre -1 est l'espace des matrices antisymétriques, car $\alpha(A) = (-1) \cdot A$ si et seulement si $A^t = -A$. C'est aussi le noyau de $\alpha + \mathrm{id}$, qui s'obtient en résolvant le système $(A + I_4)X = 0$, c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{donc} \qquad \begin{cases} 2x = 0 \\ y + z = 0 \\ y + z = 0 \\ 2t = 0 \end{cases}$$

La seule inconnue libre est z et donc une base du noyau de $\alpha + \mathrm{id}$ est formée d'un seul vecteur, la différence des 2ème et 3ème vecteurs de la base C. En d'autres termes, l'espace propre correspondant à la valeur propre -1 est $\mathrm{Vect}\,(E_{12} - E_{21})$, de dimension 1.

Exercice 3. *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & \frac{6}{5} & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -5 & 5 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

a) Trouver les valeurs propres de A.

b) Trouver des bases des sous-espaces propres de A.

c) Peut-on déduire de a) si A est inversible ou non?

d) Donner les valeurs propres de A^2.

e) Donner des bases des sous-espaces propres de A^2.

Solution 3. De nouveau dans cet exercice, on identifie $\mathbb{R}^3$ avec l'ensemble des vecteurs colonnes dans $M_{3\times 1}(\mathbb{R})$.

a) On calcule $c_A(t)$.

$$A - tI_3 = \begin{pmatrix} -2-t & 6/5 & 2 \\ 0 & -1-t & 1 \\ -5 & 5 & 3-t \end{pmatrix}.$$

Alors, $\det(A - tI_3) = -t(t^2 - 2)$. Si on veut $\det(A - tI_3) = 0$, on obtient les solutions $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \sqrt{2}$ et $\lambda_3 = -\sqrt{2}$ (qui sont les valeurs propres de A).

b) (1) On cherche $\mathbf{v}_1 \in \mathbb{R}^3$ non nul tel que $A\mathbf{v}_1 = 0\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$. Via le procédé d'échelonnage, on obtient

$$\begin{pmatrix} -2 & \frac{6}{5} & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -5 & 5 & 3 \end{pmatrix} \underset{\text{L1}\to\text{L1}\cdot(-\frac{1}{2})}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{5} & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -5 & 5 & 3 \end{pmatrix} \underset{\text{L3}\to\text{L3}+5\cdot\text{L1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{5} & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\text{L2}\to\text{L2}\cdot(-1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{5} & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \underset{\text{L3}\to\text{L3}+(-2)\cdot\text{L2}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{5} & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ce qui veut dire que l'ensemble des solutions du système $A\mathbf{v}_1 = 0$ est $\{(\frac{8}{5}c, c, c)^t \mid c \in \mathbb{R}\}$ Ainsi, l'espace propre correspondant à la valeur propre 0 est $\mathrm{Vect}\,(\frac{8}{5}, 1, 1)^t)$.

(2) On cherche $\mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^3$ tel que $A\mathbf{v}_2 = \sqrt{2}\mathbf{v}_2$. Via le procédé d'échelonnage, et en posant $x = \sqrt{2}$, on obtient

$$\begin{pmatrix} -2-x & \frac{6}{5} & 2 \\ 0 & -1-x & 1 \\ -5 & 5 & 3-x \end{pmatrix} \underset{\sim}{\overset{\text{L1}\leftrightarrow\text{L3}}{}} \begin{pmatrix} -5 & 5 & 3-x \\ 0 & -1-x & 1 \\ -2-x & \frac{6}{5} & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\text{L3}\to 5\cdot\text{L3}}{\overset{\text{L1}\to(-1)\cdot\text{L1}}{\sim}} \begin{pmatrix} 5 & -5 & -3+x \\ 0 & -1-x & 1 \\ -10-5x & 6 & 10 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\overset{\text{L3}\to\text{L3}+(2+x)\text{L1}}{}}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -5 & -3+x \\ 0 & -1-x & 1 \\ 0 & -4-5x & 4-x+x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -5 & -3+x \\ 0 & -1-x & 1 \\ 0 & -4-5x & 6-x \end{pmatrix} \underset{\sim}{\overset{\text{L3}\to\text{L3}+(-5)\cdot\text{L2}}{}}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -5 & -3+x \\ 0 & -1-x & 1 \\ 0 & 1 & 1-x \end{pmatrix} \underset{\sim}{\overset{\text{L2}\leftrightarrow\text{L3}}{}} \begin{pmatrix} 5 & -5 & -3+x \\ 0 & 1 & 1-x \\ 0 & -1-x & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\overset{\text{L3}\to\text{L3}+(1+x)\cdot\text{L2}}{}} \begin{pmatrix} 5 & -5 & -3+x \\ 0 & 1 & 1-x \\ 0 & 0 & 2-x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -5 & -3+x \\ 0 & 1 & 1-x \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc $\mathbf{v}_2 = (\frac{1}{5}(-2+4\sqrt{2})c, (\sqrt{2}-1)c, c)^t$ où $c \in \mathbb{R}$ est quelconque. Donc l'espace propre associé à la valeur propre $\lambda_2 = \sqrt{2}$ est

$$\text{Vect}\,((-2+4\sqrt{2}), 5\sqrt{2}-5, 5)^t).$$

(3) On cherche $\mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^3$ tel que $A\mathbf{v}_3 = -\sqrt{2}\mathbf{v}_3$. On peut utiliser le même échelonnage que ci-dessus mais avec $x = -\sqrt{2}$ (ce qui marche bien puisqu'on a toujours $x^2 = 2$). On obtient alors $\mathbf{v}_3 = (\frac{-1}{5}(2+4\sqrt{2})c, (-1-\sqrt{2})c, c)^t$ où $c \in \mathbb{R}$ est quelconque. Donc l'espace propre associé à la valeur propre $\lambda_3 = -\sqrt{2}$ est

$$\text{Vect}\,((-2(1+2\sqrt{2}), (-5)(\sqrt{2}+1), 5)^t).$$

c) Puisque 0 est valeur propre de A, on sait qu'il existe un vecteur $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ non nul, tel que $A \cdot \mathbf{u} = 0\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Par un des critères d'inversibilité d'une matrice, on a que A n'est pas inversible.

d) On note que si $Av = \lambda v$ alors $A^2v = A(Av) = A(\lambda v) = \lambda(Av) = \lambda(\lambda v) = \lambda^2 v$. Donc si λ est une valeur propre de A alors λ^2 est une valeur propre de A^2. Dans le cas précis où A est la matrice donnée, on a donc que 0 et 2 sont des valeurs propres de A^2.

e)
- On cherche $\mathbf{u}_1 \in \mathbb{R}^3$ non nul tel que $A^2\mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$. Il suffit de remarquer que si $\mathbf{v}_1$ est un vecteur propre pour A pour la valeur propre 0 (c.-à-d. $\mathbf{v}_1 \in \text{Vect}\,(\frac{8}{5}, 1, 1)^t)$), on a $A\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$, donc $A^2\mathbf{v}_1 = A(A\mathbf{v}_1) = A\mathbf{0} = \mathbf{0}$. Donc l'espace propre associé à μ_1 contient $(\frac{8}{5}, 1, 1)^t$.
- On cherche $\mathbf{u}_2 \in \mathbb{R}^3$ non nul tel que $A^2\mathbf{u}_2 = 2\mathbf{u}_2$. On remarque que si $\mathbf{v}_2$ est un vecteur propre pour A pour la valeur propre $\lambda_2 = \sqrt{2}$ (c.-à-d. $\mathbf{v}_2 \in \text{Vect}\,(-2+4\sqrt{2}), 5\sqrt{2}-5, 5)^t)$), on a $A\mathbf{v}_2 = \sqrt{2}\mathbf{v}_2$, donc $A^2\mathbf{v}_2 = A(A\mathbf{v}_2) = \sqrt{2}A\mathbf{v}_2 = \sqrt{2}\sqrt{2}\mathbf{v}_2 = 2\mathbf{v}_2$. De même, si $\mathbf{v}_3$ est un vecteur propre pour A pour la valeur propre $\lambda_3 = -\sqrt{2}$ (c.-à-d. $\mathbf{v}_3 \in \text{Vect}\,((-2(1+2\sqrt{2}), (-5)(\sqrt{2}+1), 5)^t)$), on a $A\mathbf{v}_3 = -\sqrt{2}\mathbf{v}_3$, donc $A^2\mathbf{v}_3 = A(A\mathbf{v}_3) = -\sqrt{2}A\mathbf{v}_3 = (-\sqrt{2})(-\sqrt{2})\mathbf{v}_3 = 2\mathbf{v}_3$. Donc l'espace propre associé à μ_1 contient

$$\text{Vect}\,((-2+4\sqrt{2}), 5\sqrt{2}-5, 5)^t, (-2(1+2\sqrt{2}), (-5)(\sqrt{2}+1), 5)^t).$$

- On note que ces trois vecteurs sont linéairement indépendants et comme le polynôme caractéristique de A^2 est de degré 3, et la multiplicité d'une valeur propre dans ce polynôme caractéristique (c'est-à-dire la multiplicité algébrique) est au moins la dimension de l'espace propre pour la valeur propre, il n'existe aucune autre valeur propre pour A^2, ni vecteur propre linéairement indépendant des trois déjà trouvés.

Exercice 4. *Soit $\alpha : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice par rapport à la base canonique $\{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ est*

$$M = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 13 & 2 & -3 \\ 2 & 10 & 6 \\ -3 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Calculer le polynôme caractéristique de α et déterminer les valeurs propres de α et les espaces propres correspondants.

Solution 4. Pour faciliter l'écriture, posons $u = 14t$, de sorte que le polynôme caractéristique de α est

$$c_\alpha(t) = \det(M - tI_3) = \det(M - \frac{1}{14}uI_3) = (\frac{1}{14})^3 \det(14M - uI_3) = (\frac{1}{14})^3 \det \begin{pmatrix} 13-u & 2 & -3 \\ 2 & 10-u & 6 \\ -3 & 6 & 5-u \end{pmatrix} = -(\frac{1}{14})^3 u(u-14)^2.$$

Les valeurs propres de α sont donc 0 et $\frac{14}{14} = 1$.

Etudions maintenant les espaces propres, à commencer par $E_0 = \text{Ker}\,(\alpha)$. Un vecteur $v = xe_1 + ye_2 + ze_3$ appartient à $\text{Ker}\,(\alpha)$ si et seulement si

$$\begin{cases} 13x + 2y - 3z & = 0 \\ 2x + 10y + 6z & = 0 \\ -3x + 6y + 5z & = 0 \end{cases}$$

Eliminant y entre la première et la deuxième équation, puis entre la première et la troisième, on trouve la même relation: $z = 3x$. Remplaçant dans n'importe quelle équation on trouve $y = -2x$. On a donc $\text{Ker}\,(\alpha) = \text{Vect}\,(e_1 - 2e_2 + 3e_3)$. Interprétation géométrique: $\text{Ker}\,(\alpha)$ est une droite passant par l'origine et perpendiculaire au plan d'équation $x - 2y + 3z = 0$.

Passons maintenant à E_1. Un vecteur $v = xe_1 + ye_2 + ze_3$ appartient à E_1 si et seulement si

$$\begin{cases} 13x + 2y - 3z & = 14x \\ 2x + 10y + 6z & = 14y \\ -3x + 6y + 5z & = 14z \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} -x + 2y - 3z & = 0 \\ 2x - 4y + 6z & = 0 \\ -3x + 6y - 9z & = 0 \end{cases}$$

Ces trois équations sont les mêmes: $x - 2y + 3z = 0$. L'espace propre E_1 est le plan d'équation $x - 2y + 3z = 0$, ou encore $\text{Vect}\,(3e_1 - e_3,\, 2e_1 + e_2)$. L'application α est en fait la projection orthogonale sur ce plan.

Exercice 5. *a) Soit P une matrice inversible de taille 2×2 et D une matrice diagonale. On pose $A = PDP^{-1}$. Montrer que $A^2 = PD^2P^{-1}$, puis déduire une formule qui permet de calculer A^{10}.*

b) On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que $A = PDP^{-1}$, puis calculer A^{10} en utilisant le point a).

Solution 5. a) Soit P une matrice inversible de taille 2×2 et D une matrice diagonale. On pose $A = PDP^{-1}$. On calcule A^2 en utilisant simplement le fait que $P^{-1}P = I_2$:

$$A^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1}.$$

Comme D est diagonale alors son carré est aussi une matrice diagonale. Les coefficients sur la diagonale sont les carrés des coefficients de la diagonale de D.

De manière générale, la puissance d'une matrice diagonalisable A est égale à $A^n = PD^nP^{-1}$ pour tout $n = 1, 2, 3, \ldots$. Ceci est facile à montrer par un raisonnement par récurrence:

1. Par hypothèse, la propriété est satisfaite pour $n = 1$.
2. La ligne suivante montre que si la propriété est vraie pour n elle est vraie pour $n + 1$:

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = PD^nP^{-1} \cdot PDP^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}.$$

3. On conclut par récurrence.

b) On calcule d'abord l'inverse de P:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

et on vérifie que $A = PDP^{-1}$. Par a), on a $A^{10} = PD^{10}P^{-1}$, où

$$D^{10} = \begin{pmatrix} 1024 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

car D est diagonale et donc D^{10} aussi, et les coefficients de la diagonale de D^{10} sont les coefficients de la diagonale de D à la puissance 10. On calcule:

$$A^{10} = PD^{10}P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1024 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2048 & 1 \\ 1024 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2047 & -2046 \\ 1023 & -1022 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6. *Soit $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices symétriques de taille 2×2, dont une base est donnée par $\mathcal{B} = \{S_1, S_2, S_3\}$ où*

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad S_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $T : \mathcal{S}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ la transformation linéaire définie par

$$T \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a - d & -b \\ -b & -a + 2d \end{pmatrix}.$$

a) *Calculer les 3 valeurs propres (distinctes) $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ de T.*

b) *Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, trouver un vecteur propre $M_i \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ associé à λ_i. Montrer que $\mathcal{B}' = \{M_1, M_2, M_3\}$ est une base de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$.*

c) *Ecrire la matrice $(T)_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}$ de T par rapport à la base $\mathcal{B}'$.*

d) *Calculer $T^{10}(A)$, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.*

Solution 6. On calcule les images des différents vecteurs de base:

$$T(S_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad T(S_2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T(S_3) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, la matrice de l'application T par rapport à la base $\mathcal{B}$ est:

$$(T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) On calcule:

$$\det\left((T)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} - t \cdot I_3\right) = (2-t)^2 \cdot (-1-t) + (1+t) = (t+1)(-(2-t)^2 + 1) = (t+1)(-t^2 + 4t - 3)$$
$$= -(t-1) \cdot (t+1) \cdot (t-3).$$

Ainsi, on a $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ et $\lambda_3 = 3$.

b) Dans ce point, A désigne la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$. On cherche les différents espaces propres. Pour $\lambda = 1$, on trouve un vecteur propre $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. De même, pour $\lambda = -1$, on trouve un vecteur propre $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (on aurait pu le deviner, puisque $T(S_2) = -S_2$). Finalement, pour la dernière valeur propre, on trouve $M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
On sait que trois vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont linéairement indépendants (vous pouvez aussi le vérifier à la main). Comme l'espace des matrices symétriques de taille 2 est de dimension 3, il s'agit d'une base.

c) Comme (M_1, M_2, M_3) est une base de vecteurs propres, associés aux valeurs propres $1, -1$ et 3 respectivement, on a $(T)_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

d) On remarque que l'on peut écrire

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot M_1 + 2 \cdot M_2 + (-1) \cdot M_3,$$

c'est-à-dire que les composantes de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}'$ sont $(2, 2, -1)$. Puisque

$$(T^{10}(A))_{\mathcal{B}'} = (T^{10})_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'} \cdot [A]_{\mathcal{B}'} = ((T)_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'})^{10} \cdot [A]_{\mathcal{B}'},$$

les composantes de $T^{10}(A)$ dans la base $\mathcal{B}'$ sont:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{10} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1^{10} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3^{10} \end{pmatrix}.$$

Finalement, on a

$$T^{10}(A) = 2 \cdot M_1 + 2 \cdot M_2 + (-3^{10}) M_3 = \begin{pmatrix} 2 - 3^{10} & 2 \\ 2 & 2 + 3^{10} \end{pmatrix}.$$

Exercice 7. *Soit $\phi \in \mathcal{L}(V, V)$. Soient $U, W \subseteq V$ des sous-espaces ϕ-invariants. Montrer que $W \cap U$ et $W + U$ sont aussi ϕ-invariants.*

Solution 7. Soit $x \in U \cap W$; comme U est ϕ-invariant, $\phi(x) \in U$, de même, comme W est ϕ-invariant, $\phi(x) \in W$. On déduit que $\phi(x) \in U \cap W$, ce qui montre que $U \cap W$ est ϕ-invariant. Maintenant soit $x \in W + U$. Donc il existe $w \in W$ et $u \in U$ tels que $x = w + u$. On utilise que chacun des sous-espaces U et W est ϕ-invariant pour voir que $\phi(w) \in W$ et $\phi(u) \in U$. On a alors $\phi(x) = \phi(w + u) = \phi(w) + \phi(u) \in W + U$, ce qui montre que $W + U$ est aussi ϕ-invariant.

Exercice 8 (Cet exercice complète une preuve du cours)**.** *Soit V un K-espace vectoriel de dimension n, avec une base fixée B, et soit $P \in \mathrm{GL}_n(K)$. Montrer qu'il existe une base E de V telle que $P = (\mathrm{id})_E^B$. Ensuite expliciter la base E dans le cas concret de $V = \mathbb{C}^2$, $B = ((-1, 1), (1, 1))$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ 3 & 2\mathrm{i} \end{pmatrix}$.*

Solution 8. Soit $B = (v_1, \ldots, v_n)$. Pour $1 \leq i \leq n$, on définit $f_i \in V$ par $f_i = \sum_{k=1}^n P_{ki} v_k$. On vérifie d'abord que $E = (f_1, \ldots, f_n)$ est une base de V. Pour ce faire, on rappelle que nous avons une application linéaire bijective $\phi : V \to K^n$ donnée par $\phi(\sum \alpha_i v_i) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Par les résultats du cours et des exercices, $\{f_1, \ldots, f_n\}$ est un ensemble libre si et seulement si $\{\phi(f_1), \ldots, \phi(f_n)\}$ est libre. Comme les coordonnées du vecteur f_i apparaissent dans la i-ème colonne de P, la dimension du sous-espace engendré par les vecteurs $\phi(f_1), \ldots, \phi(f_n)$ est le rang colonne de la matrice P, qui est aussi le rang tout simplement, qui est maximal et égal à n, par le critère d'inversibilité d'une matrice. Donc les vecteurs $\phi(f_1), \ldots, \phi(f_n)$ forment un système de générateurs dans un espace de dimension n et par un résultat du cours sont linéairement indépendants.

Ensuite, on note que par construction, la matrice de changement de base $(\mathrm{id}\,)_E^B$ est égale à la matrice P.

Dans le cas concret : Posons $v_1 = (-1, 1)$ et $v_2 = (1, 1)$. On pose $f_1 = v_1 + 3v_2 = (2, 4)$ et $f_2 = \mathrm{i}v_1 + 2\mathrm{i}v_2 = (\mathrm{i}, 3\mathrm{i})$, deux vecteurs linéairement indépendants dans $\mathbb{C}^2$ et qui forment donc une base $E = (f_1, f_2)$ de $\mathbb{C}^2$. De plus, on vérifie que $P = (\mathrm{id}\,)_E^B$.

Exercice 9 (Facultatif)**.** *Soit $\alpha \in \mathcal{L}(V)$ une transformation linéaire d'un espace vectoriel V de dimension finie. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\mathrm{Ker}\,(\alpha^n)$ et $\mathrm{Im}\,(\alpha^n)$ sont invariants par α.*

Solution 9. Soit $v \in \mathrm{Ker}\,(\alpha^n)$. On a donc $\alpha^n(v) = 0$. Il faut montrer que $\alpha(v) \in \mathrm{Ker}\,(\alpha^n)$, en d'autres termes, $\alpha^n(\alpha(v)) = 0$. En effet, $\alpha^n(\alpha(v)) = \alpha(\alpha^n(v)) = \alpha(0) = 0$.

Soit $v \in \mathrm{Im}(\alpha^n)$. Alors il existe $u \in V$ tel que $\alpha^n(u) = v$. Il faut montrer que $\alpha(v) \in \mathrm{Im}(\alpha^n)$. En effet, $\alpha(v) = \alpha(\alpha^n(u)) = \alpha^n(\alpha(u)) \in \mathrm{Im}(\alpha^n)$.

Noter que ce résultat découle aussi du résultat plus général : si $\beta \circ \alpha = \alpha \circ \beta$ pour $\beta \in \mathcal{L}(V,V)$, alors $\operatorname{Ker}(\alpha)$ et $\operatorname{Im}(\alpha)$ sont β-invariants, puisque $\alpha \circ \alpha^n = \alpha^n \circ \alpha$.

Exercice 10. (†) *Soit $\varphi : V \to V$ et $\psi : V \to V$ des endomorphismes d'un K-espace vectoriel V tels que φ possède une valeur propre non nulle et $\psi \circ \varphi = \varphi$.*

(i) Montrer que 1 est une valeur propre de ψ.

(ii) Montrer que si V est de dimension finie alors la multiplicité algébrique de la valeur propre 1 pour l'endomorphisme ψ est au moins $\dim(\operatorname{Im}\varphi)$.

Solution 10. (i) Soit $\lambda \in K \setminus \{0\}$ la valeur propre non nulle de φ et soit $v \in V$ un vecteur propre associé à cette valeur propre. On a $\varphi(v) = \lambda v$ et par conséquent $v = \lambda^{-1}\varphi(v)$. Maintenant,

$$\psi(v) = \psi(\lambda^{-1}\varphi(v)) = \lambda^{-1}\psi(\varphi(v)) = \lambda^{-1}\varphi(v) = v,$$

où on a utilisé le fait que $\psi \circ \varphi = \varphi$ dans l'avant dernière égalité. Donc v est un vecteur propre pour ψ de valeur propre 1.

(ii) Soit $w \in \operatorname{Im}(\varphi)$, d'où il existe $x \in V$ avec $w = \varphi(x)$. On a $\psi(w) = \psi(\varphi(x)) = \varphi(x) = w$ et donc $w \in E_1$, l'espace propre pour la valeur propre 1 de la transformation linéaire ψ. Ceci montre que $\operatorname{Im}\varphi \subset E_1$ et donc $\dim E_1 = m_{geom}(1) \geq \dim \operatorname{Im}\varphi$. Mais par un résultat du cours on sait aussi que la multiplicité algébrique de la valeur propre 1 est plus grande ou égale à $m_{geom}(1)$, ce qui conclut la preuve de l'assertion.

Exercice 11 (Cet exercice complète une preuve du cours)**.** *Soit V un K-espace vectoriel de dimension finie et soit $\phi \in \mathcal{L}(V,V)$. Montrer que si ϕ est triagonalisable, alors il existe des bases B et E de V telle que $(\phi)_B^B$ soit triangulaire supérieure et $(\phi)_E^E$ soit triangulaire inférieure.*

Solution 11. Le premier énoncé a été démontré en cours. Soit B la base donné par rapport à laquelle la matrice de ϕ est triangulaire supérieure, disons $B = (v_1, \ldots, v_n)$. Posons $E = (v_n, \ldots, v_1)$ et $A = (\phi)_B^B$. On a $a_{ij} = 0$ pour tout $i > j$. Donc $\phi(v_i) \in \operatorname{Vect}(v_1, \ldots, v_i)$, pour tout $1 \leq i \leq n$. Ceci montre que la matrice $(\phi)_E^E$ est triangulaire inférieure.

Exercice 12. **($\star$)** *Soit* $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Trouver toutes les valeurs propres de A et les espaces propres associés.*

Solution 12. On calcule le polynôme caractéristique de A:

$$\det(A - tI) = \det\left(\begin{pmatrix} -t & 0 & -4 \\ 0 & -\sqrt{2}-t & 0 \\ 1 & 0 & -t \end{pmatrix}\right) = (-\sqrt{2}-t)\det\begin{pmatrix} -t & -4 \\ 1 & -t \end{pmatrix} = (-\sqrt{2}-t)(t^2+4)$$

Ensuite, les valeurs propres de A sont les racines de ce polynôme, qui sont $-\sqrt{2}, 2i, -2i$.

Pour les espaces propres associés on résout les trois systèmes homogènes : $(A + \sqrt{2}I_3)X = 0$, $(A - 2\mathrm{i}I_3)X = 0$ et $(A + 2\mathrm{i}I_3)X = 0$ et on trouve respectivement les espaces propres : $E_{-\sqrt{2}} = \operatorname{Vect}((0,1,0))$, $E_{2\mathrm{i}} = \operatorname{Vect}((2\mathrm{i},0,1))$ et $E_{-2\mathrm{i}} = \operatorname{Vect}((-2\mathrm{i},0,1))$.

Exercice 13. **($\star$)** *Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé. On considère la transformation linéaire α de $M_2(\mathbb{R})$ définie par*

$$\alpha\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-a)x + ay & x \\ 2z + t & t \end{pmatrix}.$$

a) Calculer le polynôme caractéristique de α et trouver ses valeurs propres.

b) Trouver les espaces propres correspondants.

Solution 13. a) Soit $E = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$. Comme

$$\begin{array}{rcccl}\alpha(E_{11}) & = & \begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & = & (1-a)E_{11} + E_{12}, \\ \alpha(E_{12}) & = & \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & = & aE_{11}, \\ \alpha(E_{21}) & = & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} & = & 2E_{21}, \\ \alpha(E_{22}) & = & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & = & E_{21} + E_{22}, \end{array}$$

la matrice de α par rapport à la base E est $A = (\alpha)_E^E = \begin{pmatrix} 1-a & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Le polynôme caractéristique de α est

$$\begin{aligned} c_A(t) = \det(A - t \cdot I_4) = & \begin{vmatrix} 1-a-t & a & 0 & 0 \\ 1 & -t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-t & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-t \end{vmatrix} \\ = & (1-t)(2-t)(t^2 + (a-1)t - a) \\ = & (t-2)(t-1)^2(t+a). \end{aligned}$$

On en déduit que les valeurs propres de α sont $2, 1, -a$, lorsque $a \neq -1, -2$; les valeurs propres de α sont $2, 1$, lorsque $a = -1$ ou $a = -2$.

Le déterminant ci-dessus est calculé comme suit: On utilise le résultat de l'exercice 2, Série 12, et on trouve directement :

$$\begin{vmatrix} 1-a-t & a & 0 & 0 \\ 1 & -t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-t & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-t \end{vmatrix} = (1-a-t)(-t)(1-a)(2-t)(1-t) = (1-t)(2-t)(t^2 + (a-1)t - a).$$

b) On calcule d'abord l'espace propre E_2 qui est le noyau de $A - 2 \cdot I_4 = \begin{pmatrix} -1-a & a & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. C'est-à-dire que l'on doit résoudre le système homogène suivant:

$$\begin{pmatrix} -1-a & a & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0.$$

On va effectuer une suite d'opérations élementaires sur les lignes de $A - 2 \cdot I_4$.

$$\begin{pmatrix} -1-a & a & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \overset{T_{12},\ L_{43}(1)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{L_{21}(1+a)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si $a = -2$, alors la dernière matrice devient $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et donc y, z sont les variables libres. On obtient que lorsque $a = -2$, $E_2 = \{(2y, y, z, 0) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$. Il est aisé de voir que $E_2 = \text{Vect}\,(v_1, v_2)$ où $v_1 = (2, 1, 0, 0)$ et $v_2 = e_3 = (0, 0, 1, 0)$ (obtenus en prenant $z = 1, y = 0$, puis $y = 0, z = 1$).

Si $a \neq -2$, alors on fait encore $L_{12}(\frac{-2}{a+2})$ et puis $D_2(\frac{1}{-a-2})$. Cela donne $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Donc z est la seule variable libre. Lorsque $a \neq -2$, $E_2 = \{(0, 0, z, 0) \mid z \in \mathbb{R}\}$ et le vecteur $v_2 = (0, 0, 1, 0)$ en forme une base.

Maintenant on regarde E_1 qui est le noyau de $A - I_4 = \begin{pmatrix} -a & a & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. C'est-à-dire que l'on doit résoudre le système homogène suivant:

$$\begin{pmatrix} -a & a & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0.$$

On va effectuer une suite d'opérations élementaires sur les lignes de $A - I_4$.

$$\begin{pmatrix} -a & a & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\rightsquigarrow}{T_{12}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -a & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\rightsquigarrow}{L_{21}(a)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc y, t sont les variables libres et $E_1 = \{(y, y, -t, t) \mid y, t \in \mathbb{R}\}$. Il est aisé de voir que $E_1 = \mathrm{Vect}\,(v_3, v_4)$ où $v_3 = (1, 1, 0, 0)$ et $v_4 = (0, 0, -1, 1)$ (obtenus en prenant $y = 1, t = 0$, puis $y = 0, t = 1$).

Maintenant on regarde E_{-a} qui est le noyau de $A - (-a) \cdot I_4 = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2+a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1+a \end{pmatrix}$. C'est-à-dire que l'on doit résoudre le système homogène suivant:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2+a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1+a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0.$$

Si $a = -2$, alors on revient au cas E_2; si $a = -1$, on revient au cas E_1. Donc on suppose que $a \neq -2, -1$. On va effectuer une suite d'opérations élementaires sur les lignes de $A - (-a) \cdot I_4$.

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2+a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1+a \end{pmatrix} \underset{\rightsquigarrow}{L_{21}(-1),\ D_3(\tfrac{1}{2+a}),\ D_4(\tfrac{1}{1+a})} \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2+a} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\rightsquigarrow}{L_{34}(\tfrac{-1}{2+a})} \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc y est la seule variable libre. Lorsque $a \neq -1, -2$, $E_{-a} = \{(-ay, y, 0, 0) \mid y \in \mathbb{R}\}$ et le vecteur $v_5 = (-a, 1, 0, 0)$ en forme une base.
