Corrigé 12

3 décembre

Notation: Soit p un nombre premier. On note $\mathbb{F}_p$ le corps fini à p éléments et écrira simplement a pour $\bar{a}$, pour un élément $\bar{a}$ de $\mathbb{F}_p$.
On fixe un corps K.
On écrira $M_n(K)$ pour $M_{n\times n}(K)$.
Dans cette série et toutes les suivantes, on utilisera les deux notations $A \subset B$ et $A \subseteq B$ pour indiquer qu'une partie A est un sous-ensemble d'une partie B, c'est-à-dire que tout élément de la partie A appartient à la partie B.

L'exercice noté avec (†) est un peu plus difficile.

Exercice 1. *Soit a un nombre complexe fixé. On considère les matrices complexes suivantes:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5+2i & -3i & 2+7i & a \\ 0 & 1 & -i & 1 & 0 \\ i & 7+i & 6i & 3i & -4+i \\ 0 & i & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -11 & 13 & 0 & -3 \\ 0 & 7 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 8 & 5 & 0 & 4 \\ 2 & 7 & 4 & 77 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 6 & 12 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Calculer le déterminant de A en développant par rapport à une ligne ou à une colonne.

b) Refaire a) en utilisant des opérations élémentaires.

c) La matrice A est-elle inversible?

d) Calculer le déterminant de B et celui de B^2.

e) Soit p un nombre premier. Si on considère B comme une matrice à coefficients dans le corps fini $\mathbb{F}_p$ à p éléments, pour quels nombres premiers p la matrice B est-elle de rang 6?

Solution 1. a) On constate qu'il n'existe qu'un seul coefficent non nul dans la première colonne de A, donc on utilise le développement par rapport à la première colonne pour calculer le déterminant de A. Alors

$$\det(A) = A_{31} \cdot (-1)^{3+1} \cdot \det(A(3|1)) = i \cdot (-1)^{3+1} \cdot \det(A(3|1)) = i \cdot \det(A(3|1)).$$

Notons $C := A(3|1) = \begin{pmatrix} 5+2i & -3i & 2+7i & a \\ 1 & -i & 1 & 0 \\ i & 0 & a & 0 \\ 0 & a & 2 & 0 \end{pmatrix}$ et constatons qu'il n'existe qu'un seul coefficient non nul dans la quatrième colonne de C. On utilise le développement par rapport à la quatrième colonne pour calculer le déterminant de C et on obtient

$$\det(C) = C_{14} \cdot (-1)^{1+4} \cdot \det(C(1|4)) = -a \cdot \det(C(1|4)).$$

Posons $D := C(1|4) = \begin{pmatrix} 1 & -i & 1 \\ i & 0 & a \\ 0 & a & 2 \end{pmatrix}$. La règle de Sarrus donne alors

$$\det(D) = 0 + ai + 0 - 0 - 2 - a^2 = -a^2 + ia - 2.$$

Donc $\det(A) = i \det(C) = -i \cdot a \det(D) = -i \cdot a(-a^2 + ia - 2) = ia(a^2 - ia + 2)$.

b) On va effectuer des opérations élémentaires sur les lignes de A de manière à obtenir une matrice triangulaire supérieure. Rappelons que les opérations élémentaires ont les effets suivants sur le déterminant.

Type I : Si on échange deux lignes, le déterminant change de signe.

Type II : Si on multiplie une ligne par un scalaire $\lambda \neq 0$, le déterminant est multiplié par λ, mais on peut éviter le type II pour le calcul des déterminants.

Type III : Si on ajoute à une ligne un multiple scalaire d'une autre, le déterminant ne change pas.

$$\begin{pmatrix} 0 & 5+2i & -3i & 2+7i & a \\ 0 & 1 & -i & 1 & 0 \\ i & 7+i & 6i & 3i & -4+i \\ 0 & i & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & 2 & 0 \end{pmatrix} \overset{T_{13}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} i & 7+i & 6i & 3i & -4+i \\ 0 & 1 & -i & 1 & 0 \\ 0 & 5+2i & -3i & 2+7i & a \\ 0 & i & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{L_{32}(-5-2i),\ L_{42}(-i)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} i & 7+i & 6i & 3i & -4+i \\ 0 & 1 & -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2+2i & -3+5i & a \\ 0 & 0 & -1 & a-i & 0 \\ 0 & 0 & a & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{T_{34}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} i & 7+i & 6i & 3i & -4+i \\ 0 & 1 & -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & a-i & 0 \\ 0 & 0 & -2+2i & -3+5i & a \\ 0 & 0 & a & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{L_{43}(2i-2),\ L_{53}(a)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} i & 7+i & 6i & 3i & -4+i \\ 0 & 1 & -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & a-i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7i-1+2a(i-1) & a \\ 0 & 0 & 0 & a^2-ia+2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{T_{45}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} i & 7+i & 6i & 3i & -4+i \\ 0 & 1 & -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & a-i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2-ia+2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7i-1+2a(i-1) & a \end{pmatrix}.$$

Si $a^2 - ia + 2 = 0$, il existe une ligne nulle dans la dernière matrice, donc $\det(A) = 0$.

Si $a^2 - ia + 2 \neq 0$, alors l'opération $L_{54}(\frac{-(7i-1+2a(i-1))}{a^2-ia+2})$ rend la matrice de la forme suivante

$$E := \begin{pmatrix} i & 7+i & 6i & 3i & -4+i \\ 0 & 1 & -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & a-i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2-ia+2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

qui devient une matrice triangulaire supérieure. On obtient donc

$$\det(E) = i \cdot 1 \cdot (-1) \cdot (a^2 - ia + 2) \cdot a = -i(a^2 - ia + 2)a,$$

puisque le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure est le produit des coefficients de sa diagonale, et donc si $a^2 - ia + 2 \neq 0$,

$$\det(A) = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot \det(E) = -\det(E) = i(a^2 - ia + 2)a,$$

où dans le terme à droite de la première égalité, le premier facteur -1 (respectivement le deuxième, le troisième) provient de l'opération T_{13} (respectivement, T_{34}, T_{45}).

Dans tous les cas, on obtient $\det(A) = i(a^2 - ia + 2)a$.

c) La matrice A est inversible si et seulement si son déterminant est non nul, d'après le deuxième théorème d'inversibilité. Or, d'après le point a),

$$\det(A) = i(a^2 - ia + 2)a = i(a - 2i)(a + i)a,$$

donc on obtient que A est inversible si et seulement si $a \neq 2i, -i, 0$.

d) On procède comme dans le point a). Alors

$$\det(B) = B_{14} \cdot (-1)^{1+4} \cdot \det(B(1|4)) = 5 \cdot (-1)^{1+4} \cdot \det(B(1|4)) = (-5) \cdot \det(B(1|4)).$$

Notons que $F := B(1|4) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -11 & 0 & -3 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 8 & 0 & 4 \\ 2 & 7 & 4 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ et constatons qu'il n'existe qu'un seul coefficient non nul dans la quatrième colonne de F. On utilise le développement par rapport à la quatrière colonne pour calculer le déterminant de F et on obtient

$$\det(F) = F_{54} \cdot (-1)^{5+4} \cdot \det(F(5|4)) = (-3) \cdot \det(F(5|4)).$$

Or, $G := F(5|4) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -11 & -3 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 8 & 4 \\ 2 & 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. De même, on obtient

$$\det(G) = G_{22} \cdot (-1)^{2+2} \cdot \det(G(2|2)) = 7 \cdot \det(G(2|2)).$$

Comme $G(2|2) = \begin{pmatrix} 2 & -11 & -3 \\ 3 & 8 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ et la règle de Sarrus donne $\det(G(2|2)) = -10$, on obtient $\det(B) = (-5) \cdot (-3) \cdot 7 \cdot (-10) = -1050$.

Le déterminant de B^2 est $\det(B^2) = (\det(B))^2 = (-1050)^2 = 1102500$.

e) La matrice B est de rang 6 si et seulement si elle est inversible si et seulement si son déterminant est non nul. Le point d) donne $\det(B) = -1050 = -2 \times 3 \times 5^2 \times 7$, et donc ce déterminant est non nul dans $\mathbb{F}_p$ si et seulement si $p \neq 2, 3, 5, 7$.

Exercice 2 (Résultat a retenir car très utile dans les calculs de déterminants, en particulier pour calculer un polynôme caractéristique)**.** *Soient $A \in M_n(K), B \in M_{n\times m}(K), C \in M_{m\times n}(K)$ et $D \in M_m(K)$. Montrer que*

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det(A) \cdot \det(D) = \det \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Solution 2. Pour la première égalité, on va effectuer des opérations élémentaires de type I and III pour rendre la matrice triangulaire supérieure. D'abord on fait des opérations élémentaires de type I et III sur les n premières lignes pour que A devienne une matrice triangulaire supérieure et notons que ces opérations ne changent pas D. Supposons que la matrice devienne $\begin{pmatrix} A' & B' \\ 0 & D \end{pmatrix}$ avec A' triangulaire supérieure. Ensuite on fait des opérations élémentaires sur les m dernières lignes de cette dernière matrice pour que D devienne une matrice triangulaire supérieure et on obtient une matrice de la forme $\begin{pmatrix} A' & B' \\ 0 & D' \end{pmatrix}$ avec A' et D' triangulaires supérieures (Constatons que ces opérations ne changent pas B'). Cette dernière matrice est donc triangulaire supérieure. Comme le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure est le produit des coefficients de la diagonale, on obtient que $\det \begin{pmatrix} A' & B' \\ 0 & D' \end{pmatrix} = \det(A') \cdot \det(D')$.

Supposons qu'on a utilisé r fois des opérations de type I pour passer de A à A' et s fois des opérations de type I pour passer de D à D'. Alors $\det(A) = (-1)^r \det(A')$ et $\det(D) = (-1)^s \det(D')$. En plus on a aussi

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = (-1)^r \det \begin{pmatrix} A' & B' \\ 0 & D \end{pmatrix} = (-1)^{r+s} \det \begin{pmatrix} A' & B' \\ 0 & D' \end{pmatrix}.$$

Cela implique que

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = (-1)^{r+s} \det \begin{pmatrix} A' & B' \\ 0 & D' \end{pmatrix} = (-1)^{r+s} \det(A') \cdot \det(D') = \det(A) \cdot \det(D).$$

Pour montrer la deuxième égalité de l'exercice, on utilise le fait que le déterminant de la transposée d'une matrice est égal à celui de la matrice originale. Comme $\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} A^t & C^t \\ 0 & D^t \end{pmatrix}$, on obtient

$$\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix} = \det \left(\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix}^t \right) = \det \begin{pmatrix} A^t & C^t \\ 0 & D^t \end{pmatrix} = \det(A^t) \cdot \det(D^t) = \det(A) \cdot \det(D).$$

Exercice 3. *Sachant que* $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 10$, *calculer* $\begin{vmatrix} 4a & 4b & 4c \\ g & h & i \\ 3d+g & 3e+h & 3f+i \end{vmatrix}$.

Solution 3.

$$\begin{vmatrix} 4a & 4b & 4c \\ g & h & i \\ 3d+g & 3e+h & 3f+i \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ 3d+g & 3e+h & 3f+i \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ 3d & 3e & 3f \end{vmatrix}$$

$$= 12 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix} = -12 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -12 \cdot 10 = -120$$

Exercice 4. *Montrer qu'il n'existe pas de matrice* $A \in M_3(\mathbb{R})$ *telle que* $A^{2012} + I_3 = 0$.

Solution 4.

$$A^{2012} + I_3 = 0 \Longleftrightarrow A^{2012} = -I_3 \Longrightarrow \det(A^{2012}) = \det(A)^{2012} = \det(-I_3) = -1,$$

ce qui est impossible, car $\det(A) \in \mathbb{R}$ et donc $\det(A)^{2012} \geq 0$.

Exercice 5. *Dans chacun des cas suivants, trouver toutes les valeurs propres de la transformations linéaire* $\alpha : V \to V$, *et tous les vecteurs propres associés.*

a) $V = \mathbb{R}^2$, $\alpha(x, y) = (2x + y,\ -y)$.

b) $V = \mathbb{R}^2$, $\alpha(x, y) = (x + y,\ -x + y)$.

c) $V = \mathbb{C}^2$, $\alpha(x, y) = (x + y,\ -x + y)$.

d) $V = M_2(\mathbb{R})$, $\alpha \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -2d \\ -a & -b \end{pmatrix}$.

e) $V = \mathcal{F}(\mathbb{C},\ \mathbb{C})$, $\alpha(f)(x) = -xf(x)$ *pour tout* $x \in \mathbb{C}$.

f) $V = \mathcal{C}([a,\ b], \mathbb{R})$ *l'espace des fonctions continues à valeurs réelles définies sur l'intervalle fermé* $[a,\ b]$, $\alpha : V \to V$, $\alpha(f)(x) = -xf(x)$ *pour tout* $x \in [a,\ b]$.

Solution 5. a) Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Si λ est une valeur propre de α et (x, y) un vecteur propre associé à λ, alors $\lambda \cdot (x, y) = \alpha(x, y) = (2x + y, -y)$. Cela est équivalent au système linéaire d'équations suivant:

$$\begin{cases} 2x + y & = & \lambda x & (1) \\ -y & = & \lambda y & (2) \end{cases}.$$

D'après (2), on a $(\lambda + 1)y = 0$ et donc $\lambda = -1$ ou $y = 0$.

Si $\lambda = -1$, alors (2) est toujours valable (et y peut être donc arbitraire). L'équation (1) devient $y = -3x$. Donc lorsque $\lambda = -1$, les solutions du système sont les vecteurs $(x, -3x)$ avec $x \in \mathbb{R}$. On obtient que -1 est une valeur propre de α et que les vecteurs propres associés à la valeur propre -1 sont les vecteurs $(x, -3x)$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $x \neq 0$.

Si $\lambda \neq -1$, alors $y = 0$, et (1) devient $(\lambda - 2)x = 0$. On sait que $x \neq 0$, car sinon, $(x, y) = (0, 0)$ ne serait pas un vecteur propre. Cela implique que $\lambda = 2$ est une valeur propre de α et que les vecteurs propres associés à la valeur propre 2 sont de la forme $(x, 0)$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $x \neq 0$.

En résumé, les valeurs propres de α sont -1 et 2, et les vecteurs propres correspondant à -1 sont les vecteurs $(x, -3x), x \in \mathbb{R} - \{0\}$ et les vecteurs propres correspondant à 2 sont les vecteurs $(x, 0), x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

b) Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Si λ est une valeur propre de α et (x, y) un vecteur propre associé à λ, alors $\lambda \cdot (x, y) = \alpha(x, y) = (x + y, -x + y)$. Cela est équivalent au système linéaire d'équations suivant:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + y & = & \lambda x \quad (1) \\ -x + y & = & \lambda y \quad (2) \end{array} \right. .$$

D'après (2), on a $x = (-\lambda + 1)y$ (3) et si on remplace x par $(-\lambda + 1)y$ dans (1), on obtient

$$(\lambda^2 - 2\lambda + 2)y = 0 \quad (4).$$

Comme $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = (\lambda - 1)^2 + 1 > 0$ et (4) implique que $y = 0$. Cependant, (3) donne $x = 0$. On n'obtient que la solution nulle pour le système d'équations linéaires et cela contredit l'hypothèse que (x, y) est un vecteur propre de α. Donc il n'existe pas de valeur propre pour α.

c) Soient $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Si λ est une valeur propre de α et (x, y) un vecteur propre associé à λ, alors $\lambda \cdot (x, y) = \alpha(x, y) = (x + y, -x + y)$. Cela est équivalent au système linéaire d'équations suivant:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + y & = & \lambda x \quad (1) \\ -x + y & = & \lambda y \quad (2) \end{array} \right. .$$

D'après (2), on a $x = (-\lambda + 1)y$ (3), et si on remplace x par $(-\lambda + 1)y$ dans (1), on obtient

$$(\lambda^2 - 2\lambda + 2)y = 0 \quad (4).$$

Cela implique $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ ou $y = 0$.

Si $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$, c'est-à-dire que $\lambda = 1 \pm i$, alors (4) est toujours valable (y peut être arbitraire), et (3) devient $x = \mp iy$. Donc lorsque $\lambda = 1 \pm i$, les solutions du système sont les vecteurs $(\pm iy, y)$ avec $y \in \mathbb{R}$. On en déduit que $1 \mp i$ sont des valeurs propres de α et que les vecteurs propres associés à la valeur propre $1 + i$ (respectivement $1 - i$) sont de la forme $(-iy, y)$ (respectivement (iy, y)) avec $y \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Si $\lambda^2 - 2\lambda + 2 \neq 0$, alors $y = 0$ et (3) donne $x = 0$. Mais on a supposé que $(x, y) \neq (0, 0)$, ceci est une contradiction et donc $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$.

En résumé, les valeurs propres de α sont $1 \pm i$, et les vecteurs propres associés à la valeur propre $1 + i$ (respectivement $1 - i$) sont de la forme $(-iy, y)$ (respectivement (iy, y)) avec $y \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Remarque: En comparant les points b) et c), on observe que l'existence de valeurs propres dépend du corps de base.

d) Soient $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Si λ est une valeur propre de α et A un vecteur propre associé à λ, alors $\lambda \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \alpha(A) = \begin{pmatrix} c & -2d \\ -a & -b \end{pmatrix}$. Cela est équivalent au système linéaire d'équations suivant:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} c & = & \lambda a \quad (1) \\ -2d & = & \lambda b \quad (2) \\ -a & = & \lambda c \quad (3) \\ -b & = & \lambda d \quad (4) \end{array} \right. .$$

D'après (1) et (3), $c = \lambda a = -\lambda^2 c$ et donc $(\lambda^2 + 1)c = 0$. Comme $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda^2 + 1 \neq 0$ et donc $c = 0$ et on obtient aussi $a = 0$ par (3).

D'après (2) et (4), $-2d = \lambda b = -\lambda^2 d$ et donc $(\lambda^2 - 2)d = 0$. Si $d = 0$, alors (4) donne $b = 0$ et donc $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 0$ et cela contredit notre hypothèse. Donc $d \neq 0$ et $\lambda^2 - 2 = 0$, on en déduit que $\lambda = \pm\sqrt{2}$, et (4) donne $b = \mp\sqrt{2}d$. Lorsque $\lambda = \pm\sqrt{2}$, les solutions du système sont les matrices $\begin{pmatrix} 0 & \mp\sqrt{2}d \\ 0 & d \end{pmatrix}$, $d \in \mathbb{R}$.

On obtient par conséquent que les valeurs propres de α sont $\pm\sqrt{2}$, et que les vecteurs propres associés à la valeur propre $\sqrt{2}$ sont les matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2}d \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

avec $d \in \mathbb{R} - \{0\}$, et ceux associés à $-\sqrt{2}$ sont les matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}d \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

avec $d \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Remarque: Si le corps de base était $\mathbb{C}$, il y aurait deux autres valeurs propres $\pm i$. On vous encourage à faire le point d) sur $\mathbb{C}$.

e) Si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de α et $f \in \mathcal{F}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ un vecteur propre associé à λ, alors pour tout $x \in \mathbb{C}$, on a que $-xf(x) = \alpha(f)(x) = \lambda f(x)$ et donc $(x + \lambda)f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{C}$. Cela signifie que lorsque $x \neq -\lambda$, $f(x) = 0$ et $f(-\lambda)$ peut être un scalaire non nul arbitraire. Donc tout nombre complexe λ est une valeur propre de α et les vecteurs propres sont les fonctions de $\mathbb{C}$ vers lui-même qui ne s'annulent pas en $-\lambda$ et qui valent zéro partout ailleurs.

f) Comme dans e), si $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de α et $f \in \mathcal{C}([a,\ b], \mathbb{R})$ un vecteur propre associé à λ, alors $f(x) = 0$ pour tout $x \neq -\lambda$. Comme f est continue, $f(-\lambda)$ s'annule aussi. Cela signifie que f est la fonction identiquement nulle, ce qui est impossible pour un vecteur propre. Donc aucun nombre réel ne peut être une valeur propre de α.

Remarque: Comparer les points e) et f). Quelle est la différence?

Exercice 6. *Soit $\alpha : V \to V$ une transformation linéaire d'un K-espace vectoriel V. Soit λ une valeur propre de α. L'espace propre associé à λ est par définition $E_\lambda = \{v \in V \mid \alpha(v) = \lambda v\}$.*

a) Montrer que E_λ est un sous-espace vectoriel de V.

b) Montrer que $E_\lambda = \{\text{vecteurs propres correspondant } \textit{à } \lambda\} \cup \{0\}$.

c) Montrer que E_λ est invariant par α, c'est-à-dire que pour tout $w \in E_\lambda$ on a que $\alpha(w) \in E_\lambda$.

d) Soit μ une valeur propre de α, différente de λ. Montrer que $E_\lambda \cap E_\mu = \{0\}$.

Solution 6. a) Comme $\alpha(0) = 0 = \lambda \cdot 0$, on a $0 \in E_\lambda$ et cet ensemble n'est pas vide. Soient $v, w \in E_\lambda$ et $\mu \in K$. Alors

$$\alpha(\mu v + w) = \mu\alpha(v) + \alpha(w) = \mu\lambda v + \lambda w = \lambda(\mu v + w),$$

où on a utilisé la linéarité de α dans la première égalité. Cela montre que $\mu v + w \in E_\lambda$ et donc E_λ est un sous-espace vectoriel de V.

b) Pour tout $v \in E_\lambda$, on a $\alpha(v) = \lambda v$. Pour que l'égalitée soit respectée, on a alors soit $v = 0$, soit $v \neq 0$ (qui est par définition un vecteur propre correspondant à la valeur propre λ). Donc $E_\lambda \subset \{\text{vecteurs propres correspondant à } \lambda\} \cup \{0\}$.

L'autre inclusion est évidente.

On a montré que $E_\lambda = \{\text{vecteurs propres correspondant à } \lambda\} \cup \{0\}$.

c) Pour tout $v \in E_\lambda$, on a $\alpha(v) = \lambda v$. D'après le point a), E_λ est un sous-espace vectoriel de V et donc $\alpha(v) = \lambda v \in E_\lambda$. On a montré que E_λ est invariant par α.

Une autre méthode consiste à utiliser la définition de E_λ. Pour que $\alpha(v) \in E_\lambda$, il faut que $\alpha(\alpha(v)) = \lambda\alpha(v)$. Or, $\alpha(\alpha(v)) = \alpha(\lambda v) = \lambda\alpha(v)$, où on a utilisé la linéarité de α dans la deuxième égalité.

d) Soit $v \in E_\lambda \cap E_\mu$. Alors $v \in E_\lambda$ et $v \in E_\mu$. Donc $\lambda v = \alpha(v) = \mu v$ et on obtient que $(\lambda - \mu)v = 0$. Comme $\lambda \neq \mu$, cela implique $v = 0$. Donc $E_\lambda \cap E_\mu = \{0\}$.

Exercice 7. *Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel avec base ordonnée $B = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ et soit $\alpha \in \mathcal{L}(V, V)$ telle que*

$$(\alpha)_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

(a) *Montrer que* $2f_1 - f_2$ *est un vecteur propre de* α *et en déduire une valeur propre de* α.

(b) *Montrer que* -5 *est une valeur propre de* α.

(c) *Trouver* E_0 *et* E_{-5}.

Solution 7. Posons $A = (\alpha)_B^B$.

(a) On a que $\alpha(2f_1 - f_2)_B = A \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$. Cela implique que 0 est une valeur propre de α car f_1 et f_2 sont linéairement indépendants et donc $2f_1 - f_2 \neq 0_V$.

(b) On note que $\alpha(f_4) = -5f_4$, d'après la dernière colonne de A. Donc f_4 est un vecteur propre de valeur propre -5.

(c) On cherche tous $v \in V$ tel que $\alpha(v) = 0_V$, donc tout $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in M_{4\times 1}(\mathbb{R})$ telle que $A \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = 0$. On échelonne la matrice A et on obtient $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. La deuxieme variable b est libre et les autres sont principales; on trouve $a = -2b$, $c = 0$ et $d = 0$. Donc $\dim E_0 = 1$ et $E_0 = \mathrm{Vect}\,(2f_1 - f_2)$. Pour la valeur propre -5, on résout le système $A \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = -5 \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$, qui est équivalent au système $(A + 5I_4) \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = 0$. On échelonne la matrice $(A + 5I_4)$ et on obtient $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; d est libre et $a = 0 = b = c$ et on trouve $E_{-5} = \mathrm{Vect}\,(f_4)$.

Exercice 8. *On considère les permutations suivantes:*

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 7 & 1 & 8 & 2 & 6 & 4 & 9 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 4 & 6 & 5 & 2 & 9 & 3 & 8 & 7 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_2 = (1\ 3\ 5\ 6\ 8\ 9)(4\ 5\ 6\ 7\ 8)(3\ 2),$$

$$\sigma_3 = (1\ 3)(2\ 4)(3\ 1)(5\ 6)(8\ 7)(2\ 8)(1\ 3)$$

$$\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 1 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 6 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_5 = (1\ 3\ 5\ 6)(3\ 7\ 2)(1\ 2)$$

$$\sigma_6 = (1\ 3)(2\ 4)(3\ 1)(4\ 5)(5\ 6)(4\ 8)$$

$$\sigma_7 \in S_9 \quad \textit{définie par} \quad \sigma_7(i) = 10 - i$$

$$\sigma_8 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 7 & 6 & 5 & 2 & 8 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 2 & 6 & 1 & 5 & 8 & 7 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_9 = (1\ 2)(2\ 3)(3\ 4)(4\ 5)(5\ 6),$$

$$\sigma_{10} = (2\ 3\ 5\ 6)(7\ 2\ 4\ 3)(1\ 2)(2\ 3)$$

Déterminer la signature de chacune des permutations.

Solution 8. Dans la série 11, nous avons écrit chacune des permutations comme un produit de cycles disjoints :

$\sigma_1 = (1\ 5\ 7)(2\ 8\ 9\ 4)(3\ 6)$, $\sigma_2 = (1\ 3\ 2\ 5\ 8\ 4\ 6\ 7\ 9)$, $\sigma_3 = (2\ 7\ 8\ 4)(5\ 6)(1\ 3)$, $\sigma_4 = (2\ 5\ 4)(3\ 6)$, $\sigma_5 = (1\ 5\ 6)(2\ 3\ 7)$, $\sigma_6 = (2\ 4\ 8\ 5\ 6)$, $\sigma_7 = (1\ 9)(2\ 8)(3\ 7)(4\ 6)$, $\sigma_8 = (1)$, $\sigma_9 = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)$ et $\sigma_{10} = (1\ 4\ 5\ 6\ 2\ 7\ 3)$.

Maintenant on rappelle du cours qu'un r-cycle $(a_1\ a_2\ \cdots\ a_r)$ s'écrit comme un produit de $r-1$ transpositions. Donc un r-cycle est pair si r est impair et un r-cycle est impair si r est pair. Donc σ_1 est paire, σ_2 est paire, σ_3 est impaire, σ_4 est impaire, σ_5 est paire, σ_6 est paire, σ_7 est paire, σ_8 est paire, σ_9 est impaire et σ_{10} est paire.

Exercice 9 (Cet exercice complète une preuve du cours.)**.** *Soient $A \in M_{p\times n}(K)$ et $B \in M_{p\times 1}(K)$ et soit encore $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ où $x_1, \dots, x_n$ sont des inconnues. On suppose que $AX = B$ possède une solution $y = (y_1, \dots, y_n) \in K^n$. Montrer que l'ensemble des solutions du système est $\{y + x \mid x \in K^n$ est une solution du système $AX = 0\}$.*

Solution 9. Posons $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ tel que $AY = B$. Prenons $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in K^n$ une solution du système homogène $AX = 0$. Posons $Z = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$, donc $AZ = 0$. Par conséquent $A(Y + Z) = AY + AZ = B + 0 = B$. En particulier $Y + Z$ est une solution du système. De plus, si Y' est une autre solution du système $AX = B$, alors $AY' = B = AY$, et donc $A(Y' - Y) = B - B = 0$ et on peut écrire toute solution Y' tel que $Y' = Y + (Y' - Y)$, où $Y' - Y$ est bien une solution du système homogène.

Exercice 10 (Cet exercice complète une preuve du cours.)**.** *Soient V et W des K-espaces vectoriels et soit $\varphi : V \times \cdots \times V \to W$ une application m-multilinéaire. Montrer que pour tout $1 \leq i \leq m$ et pour tout $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_m \in V$ on a $\varphi(v_1, \dots, v_{i-1}, 0_V, v_{i+1}, \dots, v_m) = 0_W$.*

Solution 10. Soit $u \in V$. On a

$$\varphi(v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, 0_V, v_{i+1}, \dots, v_m) = \varphi(v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, u - u, v_{i+1}, \dots, v_m) =$$

$$\varphi(v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, u + (-1) \cdot u, v_{i+1}, \dots, v_m) = \varphi(v_1, \dots, v_{i-1}, u, v_{i+1}, \dots, v_m) - \varphi(v_1, \dots, v_{i-1}, u, v_{i+1}, \dots, v_m) = 0_W,$$

où l'avant-dernière égalité utilise la multilinéarité de φ.

Exercice 11 (Facultatif)**.** *Montrer que $A_n = \{\sigma \in S_n \mid \sigma$ est paire$\}$ est un sous-groupe de S_n. (Ce groupe s'appelle le* groupe alterné de degré *n.)*

Solution 11. La permutation identité est une permutation paire et donc A_n n'est pas vide. Ensuite, si $\sigma, \tau \in A_n$ alors $\sigma\tau$ s'écrit aussi comme un produit d'un nombre paire de permutations et donc $\sigma\tau \in A_n$. Si $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_m$ avec m paire et τ_i une transposition pour tout i, alors $\tau^{-1} = \tau_m \tau_{m-1} \cdots \tau_1$ est aussi une permutation paire. Donc $\tau^{-1} \in A_n$, ce qui complète la preuve.

Alternative: L'ensemble A_n est le noyau de l'application $\epsilon : S_n \to (\{1, -1\}, \cdot)$. Nous avons vu en cours que cette application est un morphisme de groupes et donc le noyau est un sous-groupe.

Exercice 12. **(†)** *Soit $V = \mathcal{C}^\infty(]0,\ 1[, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions réelles définies sur $]0, 1[$ qui sont infiniment dérivables. Considérons la transformation linéaire $\alpha : V \to V$ envoyant $f \in V$ sur $\alpha(f)(x) = xf'(x)$ pour tout $x \in]0, 1[$.*

a) Montrer que tout nombre réel λ est valeur propre de α en trouvant un vecteur propre f_λ correspondant.

b) Trouver ensuite tous les vecteurs propres de α.

Indication: Soit g_λ un autre vecteur propre de α associé à la valeur propre λ. Considérer $(g_\lambda / f_\lambda)'$.

Solution 12. a) Un calcul simple montre que la fonction $f_\lambda(x) = x^\lambda$ vérifie l'équation

$$\alpha(f_\lambda)(x) = xf'_\lambda(x) = x \cdot \lambda \cdot x^{\lambda - 1} = \lambda \cdot x^\lambda = \lambda f_\lambda(x).$$

Donc λ est une valeur propre de α et f_λ est un vecteur propre associé à λ.

Notons que si $\lambda = 0$, f_λ est la fonction constante $f(x) = 1$ pour tout x.

b) Soit $g_\lambda \in V$ un vecteur propre associé à la valeur propre λ. Alors il satisfait l'équation

$$\lambda g_\lambda(x) = \alpha(g_\lambda)(x) = x g'_\lambda(x), \ \forall \ x \in]0,1[.$$

Comme $x \in]0,1[$, $f_\lambda(x) = x^\lambda$ ne s'annule jamais. On considère la dérivée de la fonction g_λ / f_λ. Alors

$$\begin{aligned}
\left(\frac{g_\lambda(x)}{f_\lambda(x)}\right)' &= \frac{g'_\lambda(x) f_\lambda(x) - g_\lambda(x) f'_\lambda(x)}{f_\lambda(x)^2} = \frac{g'_\lambda(x) x^\lambda - g_\lambda(x) \lambda x^{\lambda-1}}{x^{2\lambda}} \\
&= \frac{x g'_\lambda(x) x^{\lambda-1} - \lambda g_\lambda(x) x^{\lambda-1}}{x^{2\lambda}} = \frac{(x g'_\lambda(x) - \lambda g_\lambda(x)) x^{\lambda-1}}{x^{2\lambda}} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Donc il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $\frac{g_\lambda(x)}{f_\lambda(x)} = C$ et $g_\lambda(x) = C x^\lambda$. On obtient que les vecteurs propres associés à la valeur propre λ sont les fonctions $C x^\lambda$ avec $C \neq 0$.
