Corrigé 11

26 novembre

Notation: Soit p un nombre premier. On note $\mathbb{F}_p$ le corps fini à p éléments et écrira simplement a pour $\bar{a}$, pour un élément $\bar{a}$ de $\mathbb{F}_p$.
On fixe un corps K.
On écrira $M_n(K)$ pour $M_{n\times n}(K)$.
Dans cette série et toutes les suivantes, on utilisera les deux notations $A \subset B$ et $A \subseteq B$ pour indiquer qu'une partie A est un sous-ensemble d'une partie B, c'est-à-dire que tout élément de la partie A appartient à la partie B.

L'exercice noté avec (†) est un peu plus difficile.

Exercice 1. *a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système suivant. Déterminer les inconnues libres et les inconnues principales. Trouver une base échelonnée réduite de l'espace des solutions.*

$$\begin{cases} -x-2y+4z+5t=0 \\ 3x+2y+5z-t\ =0 \\ \qquad 8y-24z-18t=0 \\ 2x \qquad +9z+4t=0. \end{cases}$$

b) Même question qu'au point a), mais en travaillant sur $\mathbb{F}_5$.

Solution 1. a) Ramenons la matrice du système à une forme échelonnée:

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & -1 \\ 0 & 8 & -24 & -18 \\ 2 & 0 & 9 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -5 \\ 3 & 2 & 5 & -1 \\ 0 & 8 & -24 & -18 \\ 2 & 0 & 9 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -5 \\ 0 & -4 & 17 & 14 \\ 0 & 8 & -24 & -18 \\ 0 & -4 & 17 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -5 \\ 0 & -4 & 17 & 14 \\ 0 & 0 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & \frac{-17}{4} & \frac{-14}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les inconnues principales sont x, y et z, et l'inconnue libre t. L'espace des solutions est de dimension 1, engendré par $(\frac{5}{2}, -\frac{3}{4}, -1, 1)$. Une base échelonnée réduite de l'espace des solutions est $((1, -\frac{3}{10}, -\frac{2}{5}, \frac{2}{5}))$ (car on veut obtenir un 1 comme première composante).

b) Sur $\mathbb{F}_5$, la forme échelonnée réduite de la matrice du système est

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Noter qu'à la première étape de l'échelonnage, nous avons utilisé que $-4 = 1$ et $4 = -1$ dans le corps $\mathbb{F}_5$, pour simplifier par la suite des calculs.

Les inconnues libres sont z et t et les inconnues principales sont x et y. La solution générale est

$$\{(3z-2t, 3z+t, z, t) \mid z, t \in \mathbb{F}_5\}.$$

Une base de ce sous-espace vectoriel est $\{(3,3,1,0), (-2,1,0,1)\}$.
Une base échelonnée réduite est $((1,0,4,3),(0,1,3,2))$.

Exercice 2. *Soit $a \in \mathbb{R}$ un nombre réel fixé. Résoudre le système linéaire suivant. Déterminer les inconnues libres et les inconnues principales.*

$$\begin{cases} 3x - y + 4z + t = 1 \\ 6x + y - z + 2t = 5 \\ \quad y + az + 3t = 2. \end{cases}$$

Solution 2. Ramenons la matrice du système à une forme échelonnée :

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & a & 3 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -9 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & a & 3 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a+3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si $a \neq -3$, une forme échelonnée de la matrice des coefficients est $\begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{a+3} & \frac{1}{a+3} \end{pmatrix}$. Les inconnues principales sont x, y et z et l'inconnue libre t.

La solution générale du système est alors:
t arbitraire, $t \in \mathbb{R}$.
$z = \frac{1}{a+3} - \frac{3t}{a+3}$
$y = 3z + 1 = \frac{a+6}{a+3} - \frac{9t}{a+3}$
$x = \frac{1}{3}y - \frac{4}{3}z - \frac{1}{3}t + \frac{1}{3} = \frac{2a+5}{3(a+3)} - \frac{at}{3(a+3)}$.

Si $a = -3$, une forme échelonnée est $\begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. Les inconnues principales sont x, y et t et l'inconnue libre z. La solution générale est alors

$$\left(\frac{5}{9}, 1, 0, \frac{1}{3}\right) + z\left(-\frac{1}{3}, 3, 1, 0\right), \quad z \in \mathbb{R}.$$

Exercice 3. *Soit la matrice inversible*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -3 \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{R}).$$

Trouver A^{-1}.

Solution 3. On échelonne la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

pour arriver à sa forme échelonnée réduite:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & \frac{5}{2} & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -12 & \frac{21}{2} & -14 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & -6 & 8 & 10 \end{pmatrix}.$$

On peut alors vérifier que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 & 4 \\ -3 & \frac{5}{2} & -3 & -4 \\ -12 & \frac{21}{2} & -14 & -18 \\ 7 & -6 & 8 & 10 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4. *Calculer l'inverse des matrices A et B, où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a & b \\ 0 & 1 & c & d. \end{pmatrix}$$

Solution 4.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} -a & -b & 1 & 0 \\ -c & -d & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. *Soit V et W des K-espaces vectoriels et soit $T \in \mathcal{L}(V, W)$.*

1. *Pour un sous-ensemble $Y \subset W$, posons $T^{-1}(Y) = \{v \in V \mid T(v) \in Y\}$, c'est l'ensemble des antécédants de Y par l'application T. Montrer que si Y est un sous-espace vectoriel de W, alors $T^{-1}(Y)$ est un sous-espace vectoriel de V.*

2. *Soient U un K-espace vectoriel et $\alpha \in \mathcal{L}(V, W)$, $\beta \in \mathcal{L}(W, U)$. Montrer que* $\operatorname{Ker}(\beta \circ \alpha) = \alpha^{-1}(\operatorname{Ker} \beta)$.

3. *Pour α, β comme dans la partie précédente, montrer que si $\beta \circ \alpha$ est bijective, alors α est injective et β est surjective.*

4. *Montrer que si $\{v_1, \ldots, v_t\}$ est une famille de vecteurs linéairement indépendants et T est injective, alors $\{T(v_1), \ldots, T(v_t)\}$ est aussi une famille de vecteurs linéairement indépendants.*

Solution 5.

1. Comme Y est un sous-espace vectoriel, $0 \in Y$ et on sait que $T(0) = 0$. Donc $0 \in T^{-1}(Y)$. Maintenant soient $x, y \in T^{-1}(Y)$ et $\lambda \in K$. Alors par définition $T(x), T(y) \in Y$. Comme Y est un sous-espace vectoriel de W, $\lambda T(x) + T(y) \in Y$. Par linéarité de T, on a que $T(\lambda x + y) \in Y$ et $\lambda x + y \in T^{-1}(Y)$. Ces raisonnements démontrent que $T^{-1}(Y)$ est un sous-espace vectoriel de V.

2. On montre les deux inclusions séparément. D'abord on montre que $\operatorname{Ker}(\beta \circ \alpha) \subseteq \alpha^{-1}(\operatorname{Ker} \beta)$. Soit $v \in \operatorname{Ker}(\beta \circ \alpha)$. Donc $\beta(\alpha(v)) = 0$ et on a que $\alpha(v) \in \operatorname{Ker} \beta$. Par définition, $v \in \alpha^{-1}(\operatorname{Ker} \beta)$.

   Maintenant on montre l'inclusion $\alpha^{-1}(\operatorname{Ker} \beta) \subseteq \operatorname{Ker}(\beta \circ \alpha)$. Soit $v \in \alpha^{-1}(\operatorname{Ker} \beta)$. Par définition, $\alpha(v) \in \operatorname{Ker}(\beta)$ et donc $\beta(\alpha(v)) = 0$, d'où on a que $v \in \operatorname{Ker}(\beta \circ \alpha)$.

3. On a $\operatorname{Ker}(\beta \circ \alpha) = \{0\}$ et comme $\operatorname{Ker}(\alpha) \subseteq \operatorname{Ker}(\beta \circ \alpha)$ on a que α est injective. Aussi on a $\beta(\alpha(V)) = U$ et donc β est surjective car $\operatorname{Im}(\beta \circ \alpha) \subseteq \operatorname{Im}(\beta)$.

4. On suppose que $\alpha_1 T(v_1) + \cdots + \alpha_t T(v_t) = 0$ pour $\alpha_i \in K$. Par la linéarité de T on a que $T(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_t v_t) = 0$ et donc $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_t v_t \in \operatorname{Ker} T$. Comme T est injective, son noyau se réduit au vecteur nul et on déduit que $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_t v_t = 0$. Par l'indépendance linéaire des v_i, on obtient que $\alpha_i = 0$ pour tout i et ceci montre que les vecteurs $T(v_1), \ldots, T(v_t)$ sont linéairement indépendants.

Exercice 6. *On considère les permutations suivantes:*

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 7 & 1 & 8 & 2 & 6 & 4 & 9 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 4 & 6 & 5 & 2 & 9 & 3 & 8 & 7 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_2 = (1\ 3\ 5\ 6\ 8\ 9)(4\ 5\ 6\ 7\ 8)(3\ 2),$$

$$\sigma_3 = (1\ 3)(2\ 4)(3\ 1)(5\ 6)(8\ 7)(2\ 8)(1\ 3)$$

$$\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 1 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 6 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_5 = (1\ 3\ 5\ 6)(3\ 7\ 2)(1\ 2)$$

$$\sigma_6 = (1\ 3)(2\ 4)(3\ 1)(4\ 5)(5\ 6)(4\ 8)$$

$$\sigma_7 \in S_9 \qquad \textit{définie par} \qquad \sigma_7(i) = 10 - i$$

$$\sigma_8 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 7 & 6 & 5 & 2 & 8 & 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 2 & 6 & 1 & 5 & 8 & 7 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_9 = (1\ 2)(2\ 3)(3\ 4)(4\ 5)(5\ 6),$$

$$\sigma_{10} = (2\ 3\ 5\ 6)(7\ 2\ 4\ 3)(1\ 2)(2\ 3)$$

Ecrire chacune des permutations σ_i sous forme d'un produit de cycles disjoints.

Solution 6. Rappelons la méthode pour écrire une permutation en un produit de cycles disjoints. Soit σ une permutation sur un ensemble de n nombres. Prenons le premier nombre, disons x_1, et regardons $x_2 = \sigma(x_1), x_3 = \sigma(x_2), \cdots$. On continue jusqu'à ce que le cycle se referme, donc on considère le plus petit indice k tel que $x_{k+1} = x_1$. Alors $(x_1\ x_2\ \cdots\ x_k)$ est un cycle qui apparaît dans la décomposition en produit de cycles disjoints. On prend ensuite un nombre qui n'apparaît pas dans ce cycle, s'il y en a un, et on recommence le même processus.

On obtient ici que $\sigma_1 = (1\ 5\ 7)(2\ 8\ 9\ 4)(3\ 6)$, $\sigma_2 = (1\ 3\ 2\ 5\ 8\ 4\ 6\ 7\ 9)$ et $\sigma_3 = (2\ 7\ 8\ 4)(5\ 6)(1\ 3)$, $\sigma_4 = (2\ 5\ 4)(3\ 6)$, $\sigma_5 = (1\ 5\ 6)(2\ 3\ 7)$, $\sigma_6 = (2\ 4\ 8\ 5\ 6)$, $\sigma_7 = (1\ 9)(2\ 8)(3\ 7)(4\ 6)$, $\sigma_8 = (1)$, $\sigma_9 = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)$ et $\sigma_{10} = (1\ 4\ 5\ 6\ 2\ 7\ 3)$.

Exercice 7. (a) *Soit $H = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(n) = n\}$. Montrer que H est un sous-groupe de S_n.*

(b) *Trouver la signature des permutations suivantes :*

$$(1\ 2\ 4\ 5), \quad (1\ 2)(3\ 4)(1\ 2\ 6), \quad (1\ 2\ 3\ \cdots\ r),$$

où $r \geq 2$.

Solution 7. Pour la partie (a), on a que (1), la permutation identité, appartient à H, donc H est non vide. Soient $\sigma, \tau \in H$; on a $\sigma\tau(n) = \sigma(\tau(n)) = \sigma(n) = n$. Donc $\sigma\tau \in H$. (Ici on écrit $\sigma\tau$ pour la composition $\sigma \circ \tau$.) Aussi comme $\sigma(n) = n$, $\sigma^{-1}(n) = n$ aussi et par conséquent $\sigma^{-1} \in H$. Ces arguments montrent que H est un sous-groupe de S_n.

Pour la partie (b), on peut vérifier que $(1\ 2\ 4\ 5) = (1\ 5)(1\ 4)(1\ 2)$ et donc sa signature est égale à -1. Pour la deuxième permutation, comme sgn est un homomorphisme de groupe, on a que $\text{sgn}((1\ 2)(3\ 4)(1\ 2\ 6)) = \text{sgn}((1\ 2))\text{sgn}((3\ 4))\text{sgn}((1\ 2\ 6)) = (-1)(-1)\text{sgn}((1\ 6)(1\ 2)) = 1$. Enfin un r-cycle s'écrit comme un produit de $r-1$ transpositions et on a que $\text{sgn}((1\ 2\ 3\ \cdots\ r)$ est égal à 1, si r est impair et à -1 si r est pair.

Exercice 8. *Soit V, W et U des K-espaces vectoriels de dimension finie non nuls. Soit $\alpha : V \to W$ et $\beta : W \to U$ des applications K-linéaires. On fixe des bases B_V, B_W et B_U de V, W et U respectivement et on pose $A = (\alpha)_{B_V}^{B_W}$ et $B = (\beta)_{B_W}^{B_U}$.*

a) *Démontrer que* $\text{Im}\,(\beta \circ \alpha) \subseteq \text{Im}\,\beta$.

b) *Démontrer que* $\text{rg}(BA) \leq \text{rg}B$.

c) *Démontrer que* $\text{Ker}\,\alpha \subseteq \text{Ker}\,(\beta \circ \alpha)$.

d) *Démontrer que* $\text{rg}(BA) \leq \text{rg}A$.

e) *Trouver dans chaque cas un exemple où l'inclusion/l'inégalité est stricte.*

f) *Trouver dans chaque cas un exemple où l'inclusion/l'inégalité est une égalité.*

Solution 8. a) Soit $z \in \text{Im}\,(\beta \circ \alpha)$. Donc il existe $x \in V$ tel que $z = \beta(\alpha(x))$. Comme $\alpha(x) \in W$, on a $y \in W$ tel que $z = \beta(y)$. Donc $z \in \text{Im}\,\beta$. Comme z est arbitraire, on a $\text{Im}\,(\beta \circ \alpha) \subseteq \text{Im}\,\beta$.

b) Noter d'abord que BA est la matrice de $\beta \circ \alpha$ par rapport aux bases B_V et B_U. Ainsi, $\text{rg}(BA) =$ rang colonne$(BA) = \dim(\text{Im}\,(\beta \circ \alpha))$ et $\text{rg}(B) =$ rang colonne$(B) = \dim(\text{Im}\,\beta)$. Comme $\text{Im}\,(\beta \circ \alpha) \subseteq \text{Im}\,\beta$ on a que $\dim(\text{Im}\,(\beta \circ \alpha)) \leq \dim(\text{Im}\,\beta)$.

c) Soit $x \in \text{Ker}\,(\alpha)$. Donc $\alpha(x) = 0$. Comme β est linéaire, $\beta(0) = 0$, et on a $\beta(\alpha(x)) = \beta(0) = 0$. Par conséquent $x \in \text{Ker}\,(\beta \circ \alpha)$. Comme $x \in \text{Ker}\,(\alpha)$ est arbitraire, on a $\text{Ker}\,(\alpha) \subseteq \text{Ker}\,(\beta \circ \alpha)$.

d) Le rang de BA est la dimension de l'image de $\beta\circ\alpha$ et le rang de A est la dimension de l'image de α. Par le théorème du rang $\dim V = \dim \mathrm{Ker}\,(\beta\circ\alpha) + \dim \mathrm{Im}\,(\beta\circ\alpha)$ et $\dim V = \dim \mathrm{Ker}\,\alpha + \dim \mathrm{Im}\,\alpha$. Par c), $\dim \mathrm{Ker}\,(\beta\circ\alpha) \geq \dim \mathrm{Ker}\,\alpha$. Donc $\dim(\mathrm{Im}\,(\beta\circ\alpha)) = \dim V - \dim(\mathrm{Ker}\,(\beta\circ\alpha)) \leq \dim V - \dim(\mathrm{Ker}\,\alpha) = \dim(\mathrm{Im}\,\alpha)$.

e) Prenons $V = W = U \neq \{0\}$. Pour (a), prenons α l'application nulle, et β l'application identité. Dans ce cas, $\mathrm{Im}\,(\beta\circ\alpha) = 0$. Pour une inégalité stricte dans (b) on prend les matrices correspondantes. Pour une inclusion stricte dans (c), on prend α l'application identité et $\beta = 0$. Dans ce cas, $\mathrm{Ker}\,(\beta\circ\alpha) = V$. Pour une inégalité stricte dans (d), prenons $B = 0$ et A la matrice identité.

f) Si $V = W = U$ et α et β sont bijectives, on a l'égalité des deux images dans (a). Pour (b), on prend les matrices identités par exemple. Si α et β sont bijectives, alors les deux noyaux sont nuls, ce qui donne une égalité dans (c). Pour une égalité dans (d), prenons A et B les matrices identités.

Exercice 9. *Soit $\alpha : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^3$ l'application $\mathbb{C}$-linéaire définie par*

$$\alpha(x,y,z,t) = (x - iy + (1+i)t,\ 2x - y + iz,\ y + z + 2it).$$

a) Trouver une base échelonnée réduite de $\mathrm{Im}\,(\alpha)$ et déterminer sa dimension.

b) Trouver une base de $\mathrm{Ker}\,(\alpha)$ et déterminer sa dimension.

c) Trouver les solutions de $\alpha(x,y,z,t) = (-i, -2+3i, 3)$.

Solution 9. a) Il est aisé de voir que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 & 1+i \\ 2 & -1 & i & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2i \end{pmatrix}$ est la matrice de cette application linéaire par rapport aux bases canoniques de $\mathbb{C}^4$ et de $\mathbb{C}^3$. Rappelons que les colonnes de A sont les composantes des images des vecteurs de base, qui engendrent $\mathrm{Im}\,(\alpha)$. Pour trouver une base échelonnée réduite de $\mathrm{Im}\,(\alpha)$, on transpose A, ce qui fait apparaître ces générateurs de $\mathrm{Im}\,(\alpha)$ en lignes. On fait alors une suite d'opérations élémentaires sur les lignes de la transposée de A. Les lignes non nulles de la matrice échelonnée réduite obtenue forment une base échelonnée réduite de $\mathrm{Im}\,(\alpha)$.

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -i & -1 & 1 \\ 0 & i & 1 \\ 1+i & 0 & 2i \end{pmatrix} \overset{L_{21}(i),\ L_{41}(-1-i)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1+2i & 1 \\ 0 & i & 1 \\ 0 & -2-2i & 2i \end{pmatrix}$$

$$\overset{T_{23},\ D_2(-i)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & -1+2i & 1 \\ 0 & -2-2i & 2i \end{pmatrix} \overset{L_{12}(-2),\ L_{32}(1-2i),\ L_{42}(2+2i)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2i \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & -1-i \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{D_3(\frac{1}{-1-i})}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2i \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \overset{L_{13}(-2i),\ L_{23}(i),\ L_{43}(-2)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc les vecteurs e_1, e_2, e_3 de la base canonique de $\mathbb{C}^3$ forment une base échelonnée réduite de $\mathrm{Im}\,(\alpha)$. Par conséquent, $\mathrm{Im}\,(\alpha) = \mathbb{C}^3$ est de dimension 3 et α est surjective.

b) Un vecteur $(x,y,z,t) \in \mathrm{Ker}\,(\alpha)$ si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & - & iy & + & & + & (1+i)t & = & 0 \\ 2x & - & y & + & iz & & & = & 0 \\ & & y & + & z & + & 2it & = & 0 \end{array}\right.$$

On doit donc résoudre ce système d'équations linéaires homogène. On pourrait écrire le système d'équations sous la forme $AX = 0$ et effectuer des opérations élémentaires sur les lignes de A. Dans la suite, on exprimera les opérations encore dans le système d'équations linéaires.

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & - & iy & + & & + & (1+i)t & = & 0 \\ 2x & - & y & + & iz & & & = & 0 \\ & & y & + & z & + & 2it & = & 0 \end{array}\right. \overset{L_{21}(-2)}{\rightsquigarrow} \left\{\begin{array}{ccccccccc} x & - & iy & + & & + & (1+i)t & = & 0 \\ & & (-1+2i)y & + & iz & + & (-2-2i)t & = & 0 \\ & & y & + & z & + & 2it & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\overset{T_{23}}{\rightsquigarrow}\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & - & iy & + & & + & (1+i)t & = & 0\\ & & y & + & z & + & 2it & = & 0\\ & & (-1+2i)y & + & iz & + & (-2-2i)t & = & 0\end{array}\right. \overset{L_{32}(1-2i),\ L_{12}(i)}{\rightsquigarrow}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & & + & iz & + & (-1+i)t & = & 0\\ & & y & + & z & + & 2it & = & 0\\ & & & & (1-i)z & + & 2t & = & 0\end{array}\right. \overset{D_3(\frac{1}{1-i})}{\rightsquigarrow}\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & & + & iz & + & (-1+i)t & = & 0\\ & & y & + & z & + & 2it & = & 0\\ & & & & z & + & (1+i)t & = & 0\end{array}\right.$$

$$\overset{L_{23}(-1),\ L_{13}(-i)}{\rightsquigarrow}\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & & & & & & & = & 0\\ & & y & + & & + & (-1+i)t & = & 0\\ & & & & z & + & (1+i)t & = & 0\end{array}\right.$$

Donc x, y, z sont les inconnues principales et t est la seule inconnue libre. Les solutions de ce système sont

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0\\ y & = & (1-i)t\\ z & = & (-1-i)t\end{array}\right. \qquad \text{avec } t \text{ libre.}$$

Donc si on pose $t = 1$, alors on obtient le vecteur $(0, 1-i, -1-i, 1)$ qui forme une base de $\mathrm{Ker}\,(\alpha)$ et $\mathrm{Ker}\,(\alpha)$ est de dimension 1.

c) Comme α est surjective, on sait qu'il existe (x, y, z, t) tel que $\alpha(x, y, z, t) = (-i, -2+3i, 3)$ si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & iy & + & & + & (1+i)t & = & -i\\ 2x & - & y & + & iz & & & = & -2+3i\\ & & y & + & z & + & 2it & = & 3\end{array}\right.$$

On doit donc résoudre ce système d'équations linéaires non homogènes. On pourrait écrire le système d'équations sous la forme $AX = B$ et effectuer des opérations élémentaires sur les lignes de A et à la fois de B. Dans la suite, on exprimera les opérations encore dans le système d'équations linéaires.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & iy & + & & + & (1+i)t & = & -i\\ 2x & - & y & + & iz & & & = & -2+3i\\ & & y & + & z & + & 2it & = & 3\end{array}\right.$$

$$\overset{L_{21}(-2)}{\rightsquigarrow}\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & iy & + & & + & (1+i)t & = & -i\\ & & (-1+2i)y & + & iz & + & (-2-2i)t & = & -2+5i\\ & & y & + & z & + & 2it & = & 3\end{array}\right.$$

$$\overset{T_{23}}{\rightsquigarrow}\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & iy & + & & + & (1+i)t & = & -i\\ & & y & + & z & + & 2it & = & 3\\ & & (-1+2i)y & + & iz & + & (-2-2i)t & = & -2+5i\end{array}\right.$$

$$\overset{L_{32}(1-2i),\ L_{12}(i)}{\rightsquigarrow}\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & & + & iz & + & (1+i)t & = & 2i\\ & & y & + & z & + & 2it & = & 3\\ & & & & (1-i)z & + & 2t & = & 1-i\end{array}\right.$$

$$\overset{D_3(\frac{1}{1-i})}{\rightsquigarrow}\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & & + & iz & + & (1+i)t & = & 2i\\ & & y & + & z & + & 2it & = & 3\\ & & & & z & + & (1+i)t & = & 1\end{array}\right.$$

$$\overset{L_{23}(-1),\ L_{13}(-i)}{\rightsquigarrow}\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & & & & & & & = & i\\ & & y & + & & + & (-1+i)t & = & 2\\ & & & & z & + & (1+i)t & = & 1\end{array}\right.$$

Les solutions de ce système sont $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & i\\ y & = & (1-i)t+2\\ z & = & (-1-i)t+1\end{array}\right.$ avec t libre. Donc si on pose $t = 0$, alors on obtient le vecteur $(i, 2, 1, 0)$ qui est une solution particulière de ce système non homogène. Les solutions de ce système sont donc $\mathrm{Ker}\,(\alpha) + (i, 2, 1, 0) = \{a(0, 1-i, -1-i, 1) + (i, 2, 1, 0) \mid a \in \mathbb{C}\}$.

Exercice 10. (†) *Soient $A, B \in M_n(K)$ des matrices triangulaires inférieures. Montrer que AB est triangulaire inférieure. Montrer aussi que si A est inversible alors A^{-1} est aussi triangulaire inférieure.*

Solution 10. On a que $A_{ij} = 0 = B_{ij}$ si $i < j$. On calcule $(AB)_{rs} = \sum_{k=1}^{n} A_{rk}B_{ks}$. On veut voir que $(AB)_{rs} = 0$ si $r < s$.

Comme $A_{rk} = 0$ si $r < k$ on a $(AB)_{rs} = \sum_{k=1}^{r} A_{rk}B_{ks}$. Si $r < s$, dans la somme on a les termes avec $k \leq r < s$ et pour ces indices $B_{ks} = 0$. Ceci montre que $(AB)_{rs} = 0$ si $r < s$.

Soit A triangulaire inférieure, inversible. Comme A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$, les composantes A_{ii} sont non nulles. On sait de plus qu'il existe une suite d'opérations élémentaires sur les lignes de A qui la réduisent à la matrice identité. Il existe des matrices élémentaires $E_1, \ldots, E_t$ correspondantes telles que $E_1 \cdots E_t A = I_n$. Comme A est déjà sous forme triangulaire inférieure, les opérations nécessaires dans cette réduction sont seulement de la forme $L_{rs}(\lambda)$ où $r > s$, ou bien de la forme $D_r(\lambda)$. (C'est-à-dire il suffit d'additionner les multiples des lignes "en haut" aux lignes "en bas", ou bien de multiplier les lignes par des scalaires non nuls, pour réduire A à la matrice identité.) Donc chacune des matrices E_i est triangulaire inférieure et par la première partie du problème le produit $E_1 \cdots E_t$ est aussi triangulaire inférieure, et cette dernière matrice $E_1 \cdots E_t$ est égale à A^{-1}.

Remarque: Ces énoncés sont aussi valables en remplaçant "inférieure" par "supérieure". On peut utiliser les propriétés de la transposée pour le montrer.