Corrigé 10

19 novembre

Notation: Soit p un nombre premier. On note $\mathbb{F}_p$ le corps fini à p éléments et écrira simplement a pour $\bar{a}$, pour un élément $\bar{a}$ de $\mathbb{F}_p$.
On fixe un corps K.
On écrira $M_n(K)$ pour $M_{n\times n}(K)$.
le symbole δ_{rs}, *le Kronecker delta*, désigne le nombre naturel 0 si $r \neq s$ et le nombre naturel 1 si $r = s$.
Dans cette série et toutes les suivantes, on utilisera les deux notations $A \subset B$ et $A \subseteq B$ pour indiquer qu'une partie A est un sous-ensemble d'une partie B, c'est-à-dire que tout élément de la partie A appartient à la partie B.

A cette série, vous pouvez rendre pour correction l'exercice 6. Il faut le donner à un des assistants de votre salle d'exercices au plus tard lors de la séance d'exercices du 26 novembre.

Les exercices notés avec (†) sont plus difficiles, mais un bon entrainement pour utiliser la théorie du cours.

Exercice 1. *Échelonner les matrices suivantes pour obtenir une matrice ligne équivalente et sous une forme échelonnée réduite, et noter les opérations élémentaires effectuées à chaque étape de calcul:*

1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & -3 \\ 4 & -1 & 6 & -4 \\ -2 & 2 & -6 & 5 \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{R}),$

2) $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -6 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in M_{4\times 5}(\mathbb{R}),$

3) $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & 4 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & -3 & 2 & -3 \\ 4 & 3 & -2 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & -1 & 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{4\times 6}(\mathbb{R}).$

Solution 1. On présente à chaque fois une suite d'opérations élémentaires possible pour arriver à la matrice échelonnée réduite, mais cette suite d'opérations n'est pas unique. Cependant, la matrice échelonnée réduite est unique.

On effectue souvent des échanges de lignes pour simplifier, lorsque c'est possible : cela nous permet d'avoir un 1 comme pivot sans faire apparaître trop de fractions.

Pour la matrice A, on effectue les opérations suivantes :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & -3 \\ 4 & -1 & 6 & -4 \\ -2 & 2 & -6 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{T_{12}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 6 & -4 \\ -2 & 2 & -6 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_{31}(-2)} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_{41}(1)} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_{42}(-1)]{L_{32}(-1),} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_{12}(1)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{D_1(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour la matrice B, on obtient :

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -6 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{T_{13}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -6 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{L_{31}(-2),\\ L_{41}(-2)}]{L_{21}(-3),} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 17 & -5 \\ 0 & 2 & -2 & 13 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 13 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_{42}(-3)]{L_{32}(-2),} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 17 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -21 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -38 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{T_{34}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 17 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -38 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -21 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{D_4(-\frac{1}{21})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 17 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -38 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{7} \end{pmatrix} \xrightarrow{L_{34}(38)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 17 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{51}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{7} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_{23}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 17 & -\frac{86}{7} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{51}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{7} \end{pmatrix} \xrightarrow{L_{24}(-17)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{51}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{7} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_{13}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -6 & \frac{65}{7} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{51}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{7} \end{pmatrix} \xrightarrow{L_{14}(6)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{47}{7} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{51}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{7} \end{pmatrix}.$$

Enfin, on fait de même pour la matrice C, et on a la suite d'opérations suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & 4 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & -3 & 2 & -3 \\ 4 & 3 & -2 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & -1 & 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{L_{31}(-4),\\ L_{41}(-2)}]{L_{21}(3),} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & -12 & 14 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 14 & -16 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 10 & -9 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{T_{23}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 14 & -16 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & -12 & 14 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 10 & -9 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{D_2(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -14 & 16 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & -12 & 14 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 10 & -9 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_{42}(3)]{L_{32}(-5),} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -14 & 16 & -1 \\ 0 & 0 & -10 & 58 & -66 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & -32 & 39 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{T_{34}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -14 & 16 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -32 & 39 & -5 \\ 0 & 0 & -10 & 58 & -66 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_{43}(2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -14 & 16 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -32 & 39 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 12 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{D_4(-\frac{1}{6})} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -14 & 16 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -32 & 39 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_{34}(32)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -14 & 16 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -25 & \frac{65}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{5}{6} \end{pmatrix} \xrightarrow{D_3(\frac{1}{5})} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -14 & 16 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 & \frac{13}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_{24}(14)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -12 & \frac{32}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 & \frac{13}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{5}{6} \end{pmatrix} \xrightarrow{L_{23}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 & \frac{13}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_{14}(3)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -2 & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 & \frac{13}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{5}{6} \end{pmatrix} \xrightarrow{L_{12}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 & \frac{13}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{5}{6} \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. *Dans chaque cas, trouver une base échelonnée réduite du sous-espace vectoriel W de K^n.*

a) $K = \mathbb{R}$, $n = 5$ *et* $W = \operatorname{Vect}\big((1,-3,2,0,1),\ (1,1,6,4,1),\ (4,-6,14,3,4)\big)$.

b) $K = \mathbb{C}$, $n = 4$ *et* $W = \operatorname{Vect}\big((1,i,-i,4),\ (-i,2,0,1-i),\ (3,2+3i,2-4i,4-2i)\big)$.

c) $K = \mathbb{F}_5$, $n = 3$ *et* $W = \operatorname{Vect}\big((1,1,1),\ (0,2,4),\ (3,0,2),\ (0,1,4),\ (4,1,2)\big)$.

Solution 2. Pour obtenir une base échelonnée réduite du sous-espace vectoriel W, on met les coefficients de chaque vecteur de la famille génératrice dans une ligne d'une matrice et on fait une suite d'opérations élémentaires sur les lignes de cette matrice pour obtenir une matrice échelonnée réduite. Les lignes non nulles de cette matrice échelonnée réduite forment une base échelonnée réduite du sous-espace vectoriel W.

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 6 & 4 & 1 \\ 4 & -6 & 14 & 3 & 4 \end{pmatrix} \overset{L_{21}(-1),\ L_{31}(-4)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 3 & 0 \end{pmatrix} \overset{D_2(\frac{1}{4}),\ D_3(\frac{1}{3})}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{L_{12}(3),\ L_{32}(-2)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \overset{L_{13}(3),\ L_{23}(1),\ D_3(-1)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc les vecteurs $(1,0,5,0,1), (0,1,1,0,0)$ et $(0,0,0,1,0)$ forment une base échelonnée réduite de W.

b)

$$\begin{pmatrix} 1 & i & -i & 4 \\ -i & 2 & 0 & 1-i \\ 3 & 2+3i & 2-4i & 4-2i \end{pmatrix} \overset{L_{21}(i),\ L_{31}(-3)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & i & -i & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1+3i \\ 0 & 2 & 2-i & -8-2i \end{pmatrix} \overset{L_{32}(-2),\ L_{12}(-i)}{\rightsquigarrow}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2i & 7-i \\ 0 & 1 & 1 & 1+3i \\ 0 & 0 & -i & -10-8i \end{pmatrix} \overset{D_3(i)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2i & 7-i \\ 0 & 1 & 1 & 1+3i \\ 0 & 0 & 1 & 8-10i \end{pmatrix} \overset{L_{13}(2i),\ L_{23}(-1)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 27+15i \\ 0 & 1 & 0 & -7+13i \\ 0 & 0 & 1 & 8-10i \end{pmatrix}.$$

Donc les vecteurs $(1,0,0,27{+}15i)$, $(0,1,0,-7{+}13i)$ et $(0,0,1,8{-}10i)$ forment une base échelonnée réduite de W.

c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{L_{31}(-3),\ L_{51}(-4)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix} \overset{D_2(3)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{L_{32}(3),\ L_{42}(-1).\ L_{52}(3)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \overset{T_{35},\ L_{12}(-1),\ D_3(4)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{L_{13}(1),\ L_{23}(-2),\ L_{43}(-2))}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

où on a utilisé des égalités comme $2 \cdot 3 = 1 \in \mathbb{F}_5$ etc. Donc les vecteurs e_1, e_2, e_3 de la base canonique de K^3 forment une base échelonnée réduite de W, par conséquent, $W = K^3$.

Exercice 3. *Trouver une base du sous-espace vectoriel*

$$W = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1+i \\ 1 & 4+i & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 & i \\ 1 & i & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i-5 & i-5 & -2-i \\ -1 & -8 & 8 \end{pmatrix}\right) \subset M_{2\times 3}(\mathbb{C}).$$

Ensuite compléter cette base en une base de l'espace $M_{2\times 3}(\mathbb{C})$.

Solution 3. On écrit les matrices par rapport à la base ordonnée $(E_{11}, E_{12}, E_{13}, E_{21}, E_{22}, E_{23})$ de $M_{2\times 3}(\mathbb{C})$, et on place les coordonnées dans les lignes d'une matrice 4×6, une ligne par matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4i \\ 2 & 2 & 1+i & 1 & 4+i & -4 \\ -1 & -1 & i & 1 & i & 3 \\ i-5 & i-5 & -2-i & -1 & -8 & 8 \end{pmatrix}.$$

Ensuite on cherche la forme échelonnée réduite de cette matrice comme dans les deux exercices précédents, et on trouve

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On déduit que une base de W est $\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ et pour la compléter en une base de $M_{2\times 3}(\mathbb{C})$, on rajoute les échelons "manquants" à la matrice échelonnée réduite, soit les deux matrices $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 4. *Soit* $\alpha : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^3$ *l'application* $\mathbb{C}$*-linéaire définie par*

$$\alpha(x, y, z, t) = (x + (2+i)z,\ 3x + iy + (7+4i)z + (-1+i)t,\ y + (1-i)z + (a+i)t)$$

avec $a \in \mathbb{R}$ *un nombre réel fixé.*

a) *Trouver une base échelonnée réduite de* $\mathrm{Im}\,(\alpha)$.

b) *Quel est le rang de* α*?*

c) *Quelle est la dimension de* $\mathrm{Ker}\,(\alpha)$*?*

Solution 4. a) Par définition, la matrice de α par rapport aux bases canoniques de $\mathbb{C}^4$ et de $\mathbb{C}^3$ est la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2+i & 0 \\ 3 & i & 7+4i & -1+i \\ 0 & 1 & 1-i & a+i \end{pmatrix}$. Rappelons que les colonnes de A sont les composantes des images des vecteurs de base, qui engendrent $\mathrm{Im}\,(\alpha)$. Pour trouver une base échelonnée réduite de $\mathrm{Im}\,(\alpha)$, on transpose A, ce qui fait apparaître ces générateurs de $\mathrm{Im}\,(\alpha)$ en lignes. On fait alors une suite d'opérations élémentaires sur les lignes de la transposée de A. Les lignes non nulles de la matrice échelonnée réduite obtenue forment une base échelonnée réduite de $\mathrm{Im}\,(\alpha)$.

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & i & 1 \\ 2+i & 7+4i & 1-i \\ 0 & -1+i & a+i \end{pmatrix} \overset{L_{31}(-2-i),\ D_2(-i)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & 1+i & 1-i \\ 0 & -1+i & a+i \end{pmatrix}$$

$$\overset{L_{32}(-1-i),\ L_{42}(1-i)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix} \overset{T_{34}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si $a \neq 1$, on peut multiplier la 3ème ligne par $(a-1)^{-1}$ et on obtient que les vecteurs $v_1 = (1, 3, 0)$, $v_2 = (0, 1, -i)$ et $v_3 = (0, 0, 1)$ forment une base échelonnée de $\mathrm{Im}\,(\alpha)$. Par conséquent, $\mathrm{Im}\,(\alpha)$ est de dimension 3 et donc une base échelonnée réduite est $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$.

Si $a = 1$, il ne reste que 2 lignes non nulles et on obtient que les vecteurs $v_1 = (1, 0, 3i)$ et $v_2 = (0, 1, -i)$ forment une base échelonnée réduite de $\mathrm{Im}\,(\alpha)$. Par conséquent, $\mathrm{Im}\,(\alpha)$ est de dimension 2 si $a = 1$.

b) Le rang de α est la dimension de $\mathrm{Im}\,(\alpha)$, donc 3 si $a \neq 1$, et 2 si $a = 1$.

c) Par le théorème du rang, $\dim \mathrm{Ker}\,(\alpha) = \dim(\mathbb{C}^4) - \dim \mathrm{Im}\,(\alpha)$. Si $a \neq 1$, on trouve $4 - 3 = 1$. Si $a = 1$, on trouve $4 - 2 = 2$.

Exercice 5. *Soit* $\phi : \mathbb{C}^4 \to M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ *l'application linéaire définie par* $\phi(a,b,c,d) = \begin{pmatrix} a-b+c & a+b+d \\ 2a-ib & ib+c+d \end{pmatrix}$. *Trouver une base de* $\mathrm{Im}\,(\phi)$.

Solution 5. On sait que $\mathrm{Im}\,(\phi)$ est engendré par $\{\phi(e_1), \phi(e_2), \phi(e_3), \phi(e_4)\}$, où (e_1, e_2, e_3, e_4) est la base canonique de $\mathbb{C}^4$.

On trouve $\phi(e_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $\phi(e_2) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$, $\phi(e_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et $\phi(e_4) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On écrit ces 4 matrices comme des vecteurs lignes par rapport à la base $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ de $M_2(\mathbb{C})$, dans les lignes d'une matrice A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -i & i \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On échelonne la matrice et on trouve que sa forme échelonnée réduite est

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ensuite, on pose les matrices correspondant aux lignes de R pour trouver une base de $\mathrm{Im}\,(\phi)$, notamment :

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right).$$

Noter que pour trouver une base, une forme seulement échelonnée de la matrice suffirait.

Exercice 6 (Cet exercice complète la preuve du 5.3.11 des notes du cours.)**.** *Soit V et W deux K-espaces vectoriels de dimension finie et $\phi \in \mathcal{L}(V,W)$. Soit B_V, B_W des bases ordonnées de V et W, respectivement. Montrer que ϕ est bijective si et seulement si $(\phi)_{B_V}^{B_W}$ est une matrice inversible.*

Solution 6. Supposons d'abord que ϕ est bijective. Par un corollaire du théorème du rang, on a que $\dim V = \dim W$; notons cette dimension par n. Donc $(\phi)_{B_V}^{B_W} \in M_n(K)$. De plus, il existe une application inverse $\psi : W \to V$, c'est-à-dire une application linéaire $\psi : W \to V$ telle que $\phi \circ \psi = \mathrm{id}_W$ et $\psi \circ \phi = \mathrm{id}_V$.
Donc $I_n = (\mathrm{id}_W)_{B_W}^{B_W} = (\phi \circ \psi)_{B_W}^{B_W} = (\phi)_{B_V}^{B_W} (\psi)_{B_W}^{B_V}$ et pareil dans l'autre sens, ce qui montre que $(\phi)_{B_V}^{B_W}$ est inversible (avec inverse $(\psi)_{B_W}^{B_V}$).

Maintenant, on suppose que $(\phi)_{B_V}^{B_W}$ est inversible; en particulier, c'est une matrice carrée et donc $\dim V = \dim W$. On pose $B = ((\phi)_{B_V}^{B_W})^{-1}$. Soit $\Theta : \mathcal{L}(W,V) \to M_n(K)$ l'application linéaire bijective associée aux choix de bases B_W, B_V; c'est-à-dire que $\Theta(\alpha) = (\alpha)_{B_W}^{B_V}$, pour $\alpha \in \mathcal{L}(W,V)$. Par la surjectivité de Θ, il existe une application linéaire $\psi : W \to V$ avec $\Theta(\psi) = B$, c'est-à-dire que $(\psi)_{B_W}^{B_V} = B$.
On a donc $(\psi)_{B_W}^{B_V} (\phi)_{B_V}^{B_W} = I_n$ et $(\phi)_{B_V}^{B_W} (\psi)_{B_W}^{B_V} = I_n$. Par conséquent $(\phi \circ \psi)_{B_W}^{B_W} = I_n$ et $(\psi \circ \phi)_{B_V}^{B_V} = I_n$ Par la correspondance bijective entre $\mathcal{L}(V,V)$ et $M_n(K)$ et entre $\mathcal{L}(W,W)$ et $M_n(K)$, on déduit que $\phi \circ \psi = \mathrm{id}_W$ et $\psi \circ \phi = \mathrm{id}_V$ ce qui montre que ϕ est bijective.

Exercice 7 (Cet exercice complète la preuve des propriétés des matrices élémentaires)**.** *Soit $A \in M_{n\times p}(K)$. On note A_i la i-ème ligne de A et donc on écrit* $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$.

(a) Démontrer que

$$\text{pour } 1 \le r \le n, \text{ et } \lambda \in K, \text{ on a } D_r(\lambda)A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_{r-1} \\ \lambda A_r \\ A_{r+1} \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}.$$

(b) Démontrer que pour $1 \le r, s \le n$, $r < s$, *on a* $T_{rs}A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_s \\ \vdots \\ A_r \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$, *c'est-à-dire que* $T_{rs}A$ *est la matrice obtenue à partir de la matrice* A *en echangeant les lignes* A_r *et* A_s.

Solution 7. (a) On a $D_r(\lambda) = \sum_{s=1}^n E_{ss} + (\lambda - 1)E_{rr}$, d'où $(D_r(\lambda)A)_{ij} = (\sum_{s=1}^n E_{ss}A)_{ij} + ((\lambda - 1)E_{rr}A)_{ij} = \sum_{s=1}^n \sum_{k=1}^n (E_{ss})_{ik}A_{kj} + (\lambda - 1)\sum_{k=1}^n (E_{rr})_{ik}A_{kj}$. Comme $(E_{ss})_{ik} \neq 0$ seulement si $k = s$, la première double somme devient $\sum_{s=1}^n (E_{ss})_{is}A_{sj}$. De même, comme $(E_{rr})_{ik} \neq 0$ seulement si $k = r$, la deuxième somme est égale à $(\lambda - 1)\delta_{ir}A_{rj}$. On a

$$(D_r(\lambda)A)_{ij} = \begin{cases} A_{ij} & \text{si } i \neq r \\ A_{rj} + (\lambda - 1)A_{rj} = \lambda A_{rj} & \text{si } i = r \end{cases}.$$

(b) On considère la composante (k, ℓ) de la matrice $T_{rs}A$. On rappelle du cours que $(T_{rs})_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } \{i, j\} = \{r, s\} \\ 1 & \text{si } i = j \notin \{r, s\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

On a

$$(T_{rs}A)_{k\ell} = \sum_{m=1}^n (T_{rs})_{km}A_{m\ell} = \begin{cases} A_{k\ell} & \text{si } k = m \notin \{r, s\} \\ A_{s\ell} & \text{si } k = r \text{ et } m = s \\ A_{r\ell} & \text{si } m = r \text{ et } k = s \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On déduit que la k-ème ligne de la matrice $T_{rs}A$ est la ligne A_k, si $k \notin \{r, s\}$, la r-ème ligne de la matrice $T_{rs}A$ est la ligne A_s, et la s-ème ligne de la matrice $T_{rs}A$ est A_r. L'énoncé est ainsi vérifié.

Exercice 8. † Unicité des systèmes échelonnés réduits. *Dans* K^n, *on considère deux systèmes de vecteurs "échelonnés réduits"* $(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ *et* $(w_1, w_2, \ldots, w_p)$, *c'est-à-dire, si* A *est la matrice* $p \times n$ *dont la* i*-ème ligne est* v_i, *alors* A *est échelonnée réduite. Pareil pour le deuxième ensemble de vecteurs* $(w_1, \ldots, w_p)$ *(avec matrice associée* B*). Soient* $j_1, \ldots, j_r$ *les échelons de* A *(si bien que* $v_{r+1} = \ldots = v_p = 0$ *si* $r < p$*) et soient* $k_1, \ldots, k_s$ *les échelons de* B *(si bien que* $w_{s+1} = \ldots = w_p = 0$ *si* $s < p$*).*

On suppose que $\mathrm{Vect}\,(v_1, \ldots, v_r) = \mathrm{Vect}\,(w_1, \ldots, w_s)$ *et on veut démontrer que les deux systèmes sont égaux.*

a) Montrer que $r = s$.

b) Montrer que $v_r = w_r$ *et que* $j_r = k_r$ *et en déduire que* $v_i = w_i$ *et que* $j_i = k_i$ *pour tout* $1 \le i \le r$.

Solution 8. a) Les vecteurs non nuls d'un système de vecteurs échelonné réduit sont linéairement indépendants, donc

$$\dim(\mathrm{Vect}\,(v_1, v_2, \ldots, v_r)) = r \text{ et } \dim(\mathrm{Vect}\,(w_1, w_2, \ldots, w_s)) = s.$$

Mais comme par hypothèse on a $\mathrm{Vect}\,(v_1, \ldots, v_r) = \mathrm{Vect}\,(w_1, \ldots, w_s)$, il s'ensuit que $r = s$.

b) Pour $1 \leq k \leq r$, on pose $V_k = \mathrm{Vect}\,(v_1, \ldots, v_k)$ et $W_k = \mathrm{Vect}\,(w_1, \ldots, w_k)$. Quitte à échanger les deux systèmes, on peut supposer que $j_r \leq k_r$. Alors la première composante non nulle de w_r est à la k_r-ème place et elle vaut 1. Mais comme $w_r \in V_r$ (car $V_r = W_s$ par hypothèse et le fait que $r = s$), $w_r = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i$ est une combinaison linéaire de $v_1, \ldots, v_r$. Comme les premières composantes de w_r sont nulles jusqu'à la k_r-ème place, on obtient $\lambda_1 = \ldots = \lambda_{r-1} = 0$ et on doit avoir de plus $j_r = k_r$ et $\lambda_r = 1$ (car $w_r \neq 0$ et les systèmes de vecteurs sont échelonnés réduits). Il s'ensuit que $w_r = v_r$. En notant $S_r = \mathrm{Vect}\,(v_r)$, nous obtenons $V_r = V_{r-1} \oplus S_r = W_{r-1} \oplus S_r = W_r$. On montre maintenant que $V_{r-1} = W_{r-1}$. (Attention, à ce stade nous ne pouvons pas immédiatement déduire que $V_{r-1} = W_{r-1}$.[1]) Soit $i < r$; on a $v_i \in V = W_{r-1} + S_r$ et donc $v_i = \sum_{j=1}^{r-1} \beta_j w_j + \alpha_r v_r$, pour $\beta_j, \alpha_r \in K$. Mais $\alpha_r = 0$ car $(v_1, v_2, \ldots, v_r)$ est un système échelonnée réduite. Donc $v_i \in W_{r-1}$. Un argument similaire montre que $w_i \in V_{r-1}$ pour tout $i < r$. Donc on a $V_{r-1} = W_{r-1}$. On répète ce même processus sur V_{r-1} et W_{r-1}, puis sur V_{r-2} et W_{r-2} et ainsi de suite pour obtenir $v_i = w_i$ et $j_i = k_i$ pour tout $1 \leq i \leq r$.

Exercice 9 (Résultat à retenir)**.** *Soit $A \in M_{n\times m}(K)$. Soit C_i la i-ème colonne de A et posons $W = \mathrm{Vect}\,(C_1, \ldots, C_m) \subset K^n$. Soit $j_1 < j_2 < \cdots < j_r$ les échelons dans la forme échelonnée réduite de A. Montrer que les colonnes $C_{j_1}, C_{j_2}, \ldots, C_{j_r}$ forment une base de W.*

(Notez que ce résultat peut être utilisé pour trouver une base de l'image d'une application linéaire après avoir échelonné la matrice de l'application.)

Solution 9. Soit $\phi : K^m \to K^n$ une application linéaire dont la matrice par rapport aux bases canoniques est la matrice A. Soit $P \in M_n(K)$ une matrice inversible telle que PA soit échelonnée réduite. (P est le produit des matrices élémentaires utilisées dans l'échelonnage de A.) Soit $\psi : K^n \to K^n$ l'application linéaire bijective dont la matrice est P.

Comme PA est échelonnée réduite avec échelons $j_1 < j_2 < \cdots < j_r$, les colonnes correspondantes de PA sont linéairement indépendantes; c'est-à-dire, $(\psi \circ \phi)(e_{j_1}), (\psi \circ \phi)(e_{j_2}), \ldots, (\psi \circ \phi)(e_{j_r})$ sont linéairement indépendants. De plus, comme ψ est bijective, $\phi(e_{j_1}), \phi(e_{j_2}), \ldots, \phi(e_{j_r})$ sont aussi linéairement indépendants. Mais ce sont précisément les colonnes $C_{j_1}, C_{j_2}, \ldots, C_{j_r}$. Enfin on a que $\mathrm{rang}(A) = \dim W = r$, et donc $C_{j_1}, \ldots, C_{j_r}$ forment une base de W.

Exercice 10 (Facultatif)**.** *Soit K un corps. Dans la série 9, exercice 8, on vous a demandé de démontrer qu'une matrice $A \in M_n(K)$ est scalaire si et seulement si A commute avec toutes les matrices de $M_n(K)$.*

Ici on propose une solution "non matricielle", avec indications, de l'implication "si A commute avec toutes les matrices alors A est une matrice scalaire".

Soit $V = K^n$, avec base canonique $C = (e_1, \ldots, e_n)$. Soit maintenant $\phi \in \mathcal{L}(V, V)$ telle que $(\phi)_C^C = A$; une telle application ϕ existe par la bijectivité de l'application $\Theta : \mathcal{L}(V, V) \to M_n(K)$. Comme $AB = BA$ pour tout $B \in M_n(K)$, on a que $\phi \circ \psi = \psi \circ \phi$ pour tout $\psi \in \mathcal{L}(V, V)$ (de nouveau par la bijectivité de Θ et le fait que Θ est un morphisme d'anneaux).

(a) Montrer que pour ϕ, ψ comme ci-dessus, $\phi(\ker \psi) \subseteq \ker \psi$.

(b) Posons $\psi_i \in \mathcal{L}(V, V)$ l'application linéaire telle que $\psi_i(e_j) = (1 - \delta_{ij})e_j$. Montrer que $\ker(\psi_i) = \mathrm{Vect}\,(e_i)$.

(c) Déduire à partir de (a) et (b) qu'il existe $\alpha_i \in K$ tel que $\phi(e_i) = \alpha_i e_i$ pour $1 \leq i \leq n$ et par conséquent A est une matrice diagonale. (Donc il reste à montrer que $\alpha_i = \alpha_j$ pour tout i, j.)

(d) Soient $1 \leq i \neq j \leq n$ et soit $\theta_{ij} \in \mathcal{L}(V, V)$ l'application linéaire telle que $\theta_{ij}(e_k) = \delta_{ik}e_j + \delta_{jk}e_i$, donc $\theta_{ij}(e_i) = e_j$, $\theta_{ij}(e_j) = e_i$ et $\theta_{ij}(e_k) = 0$ si $k \notin \{i, j\}$. Montrer que $\phi \circ \theta_{ij} = \theta_{ij} \circ \phi$ implique que $\alpha_i = \alpha_j$.

Solution 10. (a) Soit $v \in \ker \psi$. On a $\psi(\phi(v)) = \phi(\psi(v)) = \phi(0) = 0$. Donc $\phi(v) \in \ker \psi$.

(b) D'abord on note que $\psi_i(e_i) = 0$. Soit $v = \sum_{l=1}^{n} a_l e_l \in \ker \psi_i$. Alors $0 = \psi_i(v) = \sum_{l=1}^{n} a_l \psi_i(e_l) = \sum_{l=1}^{n} a_l(1 - \delta_{il})e_l = \sum_{l=1, l\neq i}^{n} a_l e_l$. Donc $v \in \ker \psi_i$ si et seulement si $a_l = 0$ pour tout $l \neq i$, d'où $\ker(\psi_i) = \mathrm{Vect}\,(e_i)$.

(c) Par (a) et (b) on déduit que $\phi(e_i) \in \mathrm{Vect}\,(e_i)$ pour tout i et par conséquent il existe $\alpha_i \in K$ tels que $\phi(e_i) = \alpha_i e_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$ et A est une matrice diagonale.

(d) Maintenant on utilise le fait que $\phi \circ \theta_{ij} = \theta_{ij} \circ \phi$ pour montrer que $\alpha_i = \alpha_j$ pour tout i, j.

On a $\phi(\theta_{ij}(e_i)) = \phi(e_j) = \alpha_j e_j$ et $\theta_{ij}(\phi(e_i)) = \theta_{ij}(\alpha_i e_i) = \alpha_i e_j$. On déduit que $\alpha_i = \alpha_j$. (Nous avons utilisé plusieurs fois que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base.)

---

[1] Pensez à $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Vect}\,((1, 0)) \oplus \mathrm{Vect}\,((0, 1)) = \mathrm{Vect}\,((1, 0)) \oplus \mathrm{Vect}\,((1, 1))$.