Corrigé 2

17 septembre 2024

A cette série, vous pouvez rendre pour correction l'exercice 3. Il faut le donner à un des assistants de votre salle d'exercices au plus tard lors de la séance d'exercices du 24 septembre.

Dans cette série et toutes les suivantes, on utilisera les deux notations $A \subset B$ et $A \subseteq B$ pour indiquer qu'une partie A est un sous-ensemble d'une partie B, c'est-à-dire que tout élément de la partie A appartient à la partie B.

Exercice 1. *Les ensembles suivants sont-ils stables pour la loi de composition indiquée? Justifier votre réponse.*

a) $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } n = 3k\}$ *pour la multiplication usuelle.*

b) $B = \{n \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } n = 3k+1\}$ *pour la multiplication usuelle.*

c) $C = \{n \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } n = 3k+2\}$ *pour la multiplication usuelle.*

d) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x = 3y\}$ *pour la loi de composition* $(x,y)+(a,b) = (x+a, y+b)$ *sur* $\mathbb{R}^2$.

Solution 1. a) Oui. Soient $n, m \in A$. Alors il existe $k, l \in \mathbb{Z}$ tels que $n = 3k,\ m = 3l$. On a donc $n \cdot m = 3k \cdot 3l = 3(3kl)$, qui appartient à A.

b) Oui. Soient $n, m \in B$. Alors il existe $k, l \in \mathbb{Z}$ tels que $n = 3k+1,\ m = 3l+1$. On a donc $n \cdot m = (3k+1)\cdot(3l+1) = 9kl + 3k + 3l + 1 = 3(3kl + k + l) + 1$, qui appartient à B.

c) Non. Soient $n, m \in C$. Alors il existe $k, l \in \mathbb{Z}$ tels que $n = 3k+2,\ m = 3l+2$. On a donc $n \cdot m = (3k+2)\cdot(3l+2) = 9kl + 6k + 6l + 4 = 3(3kl + 2k + 2l + 1) + 1$, qui n'appartient pas à C.

d) Oui. Soient $(x,y), (a,b) \in D$. Alors $2x = 3y$ et $2a = 3b$. On a donc $2(x+a) = 3(y+b)$ et donc $(x+a, y+b) \in D$.

Exercice 2. *Soit* $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}) = \{\theta_{a,b} \mid a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$, *le groupe d'applications affines de* $\mathbb{R}$ *vu en cours. (On rappelle que pour* $x \in \mathbb{R}$, $\theta_{a,b}(x) = ax + b$ *et la loi de composition est la composition d'applications.) Compléter la vérification que* $\mathrm{Aff}(\mathbb{R})$ *est un groupe. Montrer que* $\mathrm{Aff}(\mathbb{R})$ *est non abélien.*

Solution 2. On vérifie que pour $a, r \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ et $b, s \in \mathbb{R}$, $\theta_{a,b} \circ \theta_{r,s} = \theta_{ar, as+b}$ et comme $ar \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\theta_{ar,as+b} \in \mathrm{Aff}(\mathbb{R})$. La loi de composition étant la composition d'applications, elle est associative.

Comme $\theta_{1,0}(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, cette application est l'application identité sur $\mathbb{R}$, et satisfait à $\theta_{1,0} \circ f = f = f \circ \theta_{1,0}$ pour toute application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Donc $\mathrm{Aff}(\mathbb{R})$ possède un élément neutre. Enfin, pour que $\theta_{a,b} \circ \theta_{r,s}(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, il suffit et il faut que $ar = 1$ et $as + b = 0$. On pose $r = \frac{1}{a}$ et $s = -\frac{b}{a}$ et on trouve $\theta_{a,b} \circ \theta_{r,s} = \theta_{1,0} = \theta_{r,s} \circ \theta_{a,b}$. Par conséquent $\theta_{r,s} = \theta_{a,b}^{-1}$ est un élément de $\mathrm{Aff}(\mathbb{R})$ et tout élément de $\mathrm{Aff}(\mathbb{R})$ possède un inverse, ce qui termine la démonstration que $\mathrm{Aff}(R)$ est un groupe.

Pour le dernier énoncé, on peut noter que $\theta_{2,3} \circ \theta_{2,-3} = \theta_{4,-3}$ et $\theta_{2,-3} \circ \theta_{2,3} = \theta_{4,3}$, ce qui montre que $\mathrm{Aff}(\mathbb{R})$ est non abélien.

Exercice 3. *Soit* $(G, *)$ *un groupe. Fixons* $a \in G$ *et définissons l'application* $T_a : G \to G$ *(une translation) par* $T_a(g) = a * g$, *pour tout* $g \in G$. *Montrer que* T_a *est une application bijective, c'est-à-dire surjective et injective.*

Solution 3. On montre d'abord que T_a est injective; supposons $T_a(x) = T_a(y)$ pour $x, y \in G$. On a alors $a * x = a * y$ et en multipliant à gauche par a^{-1}, l'inverse de a, on obtient

$$a^{-1} * (a * x) = a^{-1} * (a * y) \Longrightarrow (a^{-1} * a) * x = (a^{-1} * a) * y$$

$$\Longrightarrow e * x = e * y \Longrightarrow x = y.$$

Donc T_a est injective.

Maintenant montrons que T_a est surjective. Soit $g \in G$. On note que $a^{-1} * g \in G$ et $T_a(a^{-1} * g) = a * (a^{-1} * g) = (a * a^{-1}) * g = e * g = g$. Donc T_a est surjective.

Exercice 4. *Montrer que si $n > 2$, alors le groupe symétrique S_n n'est pas abélien.*

Solution 4. On considère (par exemple) les deux permutations $\sigma, \tau \in S_n$:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 1 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix} \text{ and } \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 3 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}.$$

On vérifie que $\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 3 & 1 & \cdots & n \end{pmatrix}$ et $\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 3 & 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$.

Exercice 5. *Soit $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers modulo 6. Pour $a \in \mathbb{Z}$ on notera par $\bar{a} \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ la classe d'équivalence de a modulo 6. On définit une loi de composition $*$ sur $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ par $\bar{a} * \bar{b} = \overline{ab}$, pour tout $a, b \in \mathbb{Z}$. (Ici ab est le produit usuel de a et b dans $\mathbb{Z}$.) On admet que la loi de composition $*$ est bien définie et associative.*

(a) Déterminer si $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, *)$ est un groupe.

(b) Trouver toutes les solutions de l'équation $x * x + x = \bar{0}$ pour $x \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

Solution 5. (a) Il existe un élément neutre pour $*$, notamment $\bar{1}$. Mais les éléments $\bar{0}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$, $\bar{4}$ ne possèdent pas d'élément inverse par rapport à la loi $*$. Donc $*$ ne munit pas l'ensemble $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ d'une structure de groupe.

(b) On teste les 6 éléments $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \ldots, \bar{5}$ de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ et on trouve que $\bar{0}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{5}$ satisfont à l'égalité et que $\bar{1}$ et $\bar{4}$ ne la satisfont pas.

Exercice 6 (Cet exercice complète quelques preuves du cours.)**.** *Soient $(G, *)$ un groupe et $a, a_1, \ldots, a_t \in G$, avec inverses respectifs $a^{-1}, a_1^{-1}, \ldots, a_t^{-1}$.*

(a) Montrer que l'inverse de a est unique.

(b) Montrer que l'inverse de $a_1 * \cdots * a_t$ est égal à $(a_t^{-1} * \cdots * a_1^{-1})$.

(c) Montrer que l'inverse de a^{-1} est égal à a.

Solution 6. (a) Supposons que a possède deux inverses: a^* et a'. Nous avons montré en cours que les inverses sont les inverses à gauche et à droite, ce qui permet de simplifier à gauche et à droite. Ainsi on a

$$a^* * a = a' * a \Longrightarrow a^* = a'.$$

(b) On a $(a_1 * \cdots * a_t) * (a_t^{-1} * \cdots * a_1^{-1}) = a_1 * \cdots * (a_t * a_t^{-1}) * \cdots * a_1 = a_1 * \cdots * (a_{t-1} * a_{t-1}^{-1}) * \cdots * a_1$, et on continue ainsi pour obtenir l'élément neutre de G. C'est aussi vrai pour $(a_t^{-1} * \cdots * a_1^{-1}) * (a_1 * \cdots * a_t)$.

(c) On a $a^{-1} * a = e = a^{-1} * (a^{-1})^{-1}$; la première égalité provient du fait que a^{-1} est l'inverse à gauche de a et la deuxième du fait que $(a^{-1})^{-1}$ est l'inverse à droite de a^{-1}. La simplification à gauche montre alors que $a = (a^{-1})^{-1}$.

Exercice 7 (Facultatif)**.** *Soient $(G_1, *)$ et $(G_2, \circ)$ des groupes. On munit le produit cartésien $G_1 \times G_2$ d'une loi de composition $\cdot$ comme suit*

$$\cdot : (G_1 \times G_2) \times (G_1 \times G_2) \to G_1 \times G_2, \quad (a, b) \cdot (c, d) = (a * c, b \circ d), \text{ pour } a, c \in G_1, b, d \in G_2.$$

Montrer que $(G_1 \times G_2, \cdot)$ est un groupe.

Solution 7. La loi $\cdot$ est bien une loi de composition sur $G_1 \times G_2$, car pour $a, b \in G_1$, $x, y \in G_2$, on a $a * b \in G_1$ et $x \circ y \in G_2$. Pour $a, b, c \in G_1, x, y, z \in G_2$, $(a, x) \cdot ((b, y) \cdot (c, z)) = (a, x) \cdot (b * c, y \circ z) = (a * (b * c), x \circ (y \circ z)) = ((a * b) * c, (x \circ y) \circ z) = (a * b, x \circ y) \cdot (c, z) = ((a, x) \cdot (b, y)) \cdot (c, z)$. La troisième égalité est vérifiée car $*$ et $\circ$ sont des lois associatives. La loi $\cdot$ est donc associative.

Ensuite si e_i est l'élément neutre de G_i pour $i = 1, 2$, on vérifie que pour tout $x_i \in G_i$, $i = 1, 2$, on a $(e_1, e_2) \cdot (x_1, x_2) = (x_1, x_2) = (x_1, x_2) \cdot (e_1, e_2)$ et (e_1, e_2) est un élément neutre dans $G_1 \times G_2$. Enfin, pour x_i comme ci-dessus, soit x_i^{-1} l'inverse de x_i dans G_i. Donc $(x_1^{-1}, x_2^{-1}) \cdot (x_1, x_2) = (x_1^{-1} * x_1, x_2^{-1} \circ x_2) = (e_1, e_2)$, ce qui montre l'existence des inverses à gauche, et de façon similaire (x_1^{-1}, x_2^{-1}) est l'inverse à droite de (x_1, x_2).

Exercice 8 (Cet exercice est fastidieux et facultatif, mais vous donnerait encore un exercice de vérification des axiomes d'un groupe)**.** *Soit S^1 le cercle unité dans $\mathbb{R}^2$, i.e. $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. On définit la loi de composition $*$ sur $\mathbb{R}^2$ par*

$$(a, b) * (c, d) = (ac - bd,\ ad + bc)$$

pour $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

a) *Montrer que ceci définit une loi de composition associative et commutative sur $\mathbb{R}^2$.*

b) *Montrer que S^1 est stable pour $*$.*

c) *Trouver des expressions pour l'élément neutre, et pour l'inverse d'un élément quelconque $(a, b) \in S^1$.*

d) *Montrer que $(S^1, *)$ est un groupe. Est-il commutatif?*

Solution 8. a) Soient $(a, b), (c, d), (d, e) \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$\begin{aligned} ((a, b) * (c, d)) * (e, f) &= (ac - bd,\ ad + bc) * (e, f) \\ &= (ace - bde - adf - bcf,\ acf - bdf + ade + bce) \\ &= (ace - adf - bcf - bde,\ acf + ade + bce - bdf) \\ &= (a, b) * (ce - df,\ cf + de) \\ &= (a, b) * ((c, d) * (e, f)). \end{aligned}$$

La loi de composition $*$ est donc associative.

Soient $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$. Alors $(a, b) * (c, d) = (ac - bd,\ ad + bc) = (c, d) * (a, b)$. La loi de composition $*$ est donc commutative.

b) Soient $(a, b), (c, d) \in S^1$. Alors $a^2 + b^2 = 1 = c^2 + d^2$. On a

$$\begin{aligned} (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 &= (a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2) + (a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2) \\ &= a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2 \\ &= (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Donc $(a, b) * (c, d) = (ac - bd,\ ad + bc) \in S^1$. Par conséquent, S^1 est stable pour $*$.

c) L'élément $(1, 0) \in S^1$ est l'élément neutre de S^1. En effet, pour tout $(a, b) \in S^1$,

$$(1, 0) * (a, b) = (1{\cdot}a - 0{\cdot}b, 1{\cdot}b + 0{\cdot}a) = (a, b)\,,$$

et donc aussi $(a, b) * (1, 0) = (a, b)$ par commutativité de $*$.

Soient $(a, b), (c, d) \in S^1$ tels que $(a, b) * (c, d) = (ac - bd,\ ad + bc) = (1, 0)$. On doit résoudre le système d'équations:

$$ac - bd = 1 \tag{1}$$
$$ad + bc = 0 \tag{2}$$

On multiplie la première équation par b et la deuxième par a pour obtenir deux nouvelles égalités (mais un système qui n'est pas nécessairement équivalent au système de départ):

$$abc - b^2d = b \tag{3}$$
$$a^2d + abc = 0 \tag{4}$$

En faisant la différence des deux équations on trouve $a^2d + b^2d = -b$. Comme $a^2 + b^2 = 1$, on trouve $d = -b$ et ensuite on substitue pour trouver que $a(-b) + bc = 0$. On déduit que soit $b = 0$ soit $a = c$. Si $b = 0$, alors $a = \pm 1$, $d = 0$ et $c = a$.

Ainsi, dans tous les cas, l'inverse de (a, b) est $(a, -b)$.

d) Observons qu'avec a), b) et c), on a montré que $(S^1, *)$ est un groupe. C'est un groupe commutatif, car d'après a), la loi de composition $*$ est commutative.