EPFL Automne 2024
Algebre Lineaire Avancee, MATH-110

Série 9

Tous les exercices seront corriges.

Vous etes fortement encourages a essayer de resoudre (eventuellement a plusieurs) l'exercice ($\star$) et a rendre votre solution (eventuellement a plusieurs) avant le mercredi de la semaine suivante. Il faudra transmettre votre solution sur moodle, sous forme d'un fichier pdf unique (eventuellement tape en LaTeX) en suivant le lien moodle de la semaine relative a cette la serie.

Soit K un corps ; dans la suite si n est un entier on ecrira "n" pour $n_K = n.1_K$. De meme si n n'est pas divisible par $\mathrm{car}(K)$ (de sorte que n_K est inversible), on ecrira n^{-1} ou $1/n$ pour l'inverse multiplicatif de n_K : par exemple si $\mathrm{car}K \neq 3$, on ecrira $2/3 = 2.3^{-1}$ pour $2_K.3_K^{-1}$.

Produits de matrices

Exercice 1. Effectuer tous les produits possibles des matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 3 & 5 & -3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 5 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},\ E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Coefficients des applications lineaires

Soit $d \geqslant 1$, l'espace vectoriel produit K^d est muni d'une base dite base canonique qu'on notera

$$\mathscr{B}_d^0 = \{\mathbf{e}_1^0 = (1, 0, \cdots, 0),\ \mathbf{e}_2^0 = (0, 1, \cdots, 0), \cdots, \mathbf{e}_d^0 = (0, 0, \cdots, 1)\}.$$

Par exemple pour $d = 3$

$$\mathscr{B}_3^0 = \{\mathbf{e}_1^0 = (1, 0, 0),\ \mathbf{e}_2^0 = (0, 1, 0), \mathbf{e}_3^0 = (0, 0, 1)\}.$$

Exercice 2. Soit $\varphi : K^2 \mapsto K^3$ definie par

$$\varphi(x, y) = (-x + 3y, 2x - y, x + y).$$

1. Donner une famille generatrice de $\mathrm{Im}(\varphi)$ puis donner une base de $\mathrm{Im}(\varphi)$.
2. Donner une representation cartesienne de $\mathrm{Im}(\varphi)$ avec une nombre minimal d'equations.
3. Donner une representation cartesienne de $\ker(\varphi)$ avec une nombre minimal d'equations. Trouver une base de $\ker(\varphi)$.
4. Montrer que les coefficients de φ relativement a $\mathcal{B}_{\mathscr{B}_3^0,\mathscr{B}_2^0}$ sont donnes par

$$\begin{pmatrix} -1 & ? \\ ? & -1 \\ 1 & ? \end{pmatrix}$$

5. Calculer directement $\varphi(3, 3)$. Retrouver ce resultat a l'aide de la formule calculant l'image d'un vecteur par une application lineaire en fonction des coefficients de celle-ci.

Exercice 3. Soient les applications lineaires suivante sur les polynomes :

$$\alpha : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[t]_{\leqslant 3} & \mapsto & \mathbb{R}[t]_{\leqslant 3} \\ P(t) & \mapsto & 2P'(t) - P(t) \end{array} \quad , \quad \beta : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[t]_{\leqslant 3} & \mapsto & \mathbb{R}[t]_{\leqslant 2} \\ P(t) & \mapsto & P'(t) \end{array}.$$

1. Determiner le rang de α, donner une base de son noyau et de son image.
   Meme question pour β et $\beta \circ \alpha$ (on representera un polynome sous la forme $at^3 + bt^2 + ct + d$ $a, b, c, d \in \mathbb{R}$).
2. Determiner la matrice de α par rapport a la base canonique $\{1, t, t^2, t^3\}$.
3. Meme question pour β par rapport aux bases canoniques $\{1, t, t^2, t^3\}$ et $\{1, t, t^2\}$.
4. Meme question pour $\beta \circ \alpha$ par rapport aux bases canoniques $\{1, t, t^2, t^3\}$ et $\{1, t, t^2\}$.

Exercice 4. Soit $V = K^2$ et

$$\mathscr{B}^0 = \mathscr{B}_2^0 = \{\mathbf{e}_1^0 = (1, 0),\ \mathbf{e}_2^0 = (0, 1)\}$$

la base canonique.

1. Determiner pour quelles valeurs de $\mathrm{car}(K)$ la famille

$$\mathscr{B} = \{\mathbf{e}_1 = (1, 2),\ \mathbf{e}_2 = (3, 1)\}$$

   est une base de V. On suppose pour toute la suite que la caracteristique de K est telle que $\mathscr{B}$ est bien une base (on peut meme supposer que $\mathrm{car}(K) = 0$ si on prefere).

2. Exprimer $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ comme CL de $\mathbf{e}_1^0$ et de $\mathbf{e}_2^0$. Exprimer $\mathbf{e}_1^0, \mathbf{e}_2^0$ comme CL de $\mathbf{e}_1$ et de $\mathbf{e}_2$.
3. On considere l'espace vectoriel des applications lineaires de V vers V
$$\mathrm{End}_K(V) = \mathrm{Hom}_K(V, V).$$
Suivant qu'on choisit $\mathscr{B}^0$ ou $\mathscr{B}$ comme bases de V vu comme espace de depart ou comme d'arrivee, on obtient quatres bases possibles pour $\mathrm{Hom}_K(V, V)$:
$$\mathcal{B}_{\mathscr{B}^0,\mathscr{B}^0},\ \mathcal{B}_{\mathscr{B},\mathscr{B}},\ \mathcal{B}_{\mathscr{B}^0,\mathscr{B}},\ \mathcal{B}_{\mathscr{B},\mathscr{B}^0}.$$
4. Soit
$$\varphi = \mathrm{Id}_V : v \mapsto v$$
l'application identite de V. Calculer les coefficient $(m_{ij}(\mathrm{Id}_V))_{i,j\leqslant 2}$ de Id_V relativement aux 4 bases ci-dessus. (les deux premiers cas ne demandent que tres peu de calculs et les autres pas trop de calculs une fois qu'on a fait la question 2). En particulier on verifiera qu'on obtient bien la matrice identite pour les deux premieres bases.
5. Soit $\psi : V \mapsto V$ l'unique application lineaire telle que
$$\psi(1, 2) = (2, 4),\ \psi(3, 1) = (-3, -1).$$
Calculer $\psi(1, 0)$ et $\psi(0, 1)$ comme CL des elements de $\mathscr{B}^0$ et comme CL des elements de $\mathscr{B}$.
6. Calculer les coefficients de ψ relativement aux bases
$$\mathcal{B}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}, \mathcal{B}_{\mathscr{B},\mathscr{B}^0}, \mathcal{B}_{\mathscr{B}^0,\mathscr{B}^0}.$$
7. Calculer $\psi(x, y)$ pour tout $(x, y) \in K^2$ (par exemple en utilisant la formule pour l'image d'un vecteur en fonctions des coefficients de l'application lineaire relativement a des bases convenables).
8. Calculer les coefficients de $\psi^2 = \psi \circ \psi$ relativement aux bases
$$\mathcal{B}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}, \mathcal{B}_{\mathscr{B},\mathscr{B}^0}, \mathcal{B}_{\mathscr{B}^0,\mathscr{B}^0}.$$

"I push my fingers ..."

Exercice 5 ($\star$)**.** Soit V, W deux EVs de dimensions finies. On rappelle que etant donne $\varphi : V \mapsto W$ une application lineaire, sa duale $\varphi^* : W^* \mapsto V^*$ est l'application qui a toute forme lineaire $\ell : W \mapsto K$ sur W associe la forme lineaire sur V
$$\varphi^*(\ell) : v \mapsto \varphi^*(\ell)(v) := \ell(\varphi(v)) \in K.$$

1. Montrer que l'application $\bullet^*$ qui a une application lineaire de V vers W associe l'application lineaire duale (de W^* vers V^*)

$$\bullet^* : \varphi \in \mathrm{Hom}(V, W) \mapsto \varphi^* \in \mathrm{Hom}(W^*, V^*)$$

   est elle meme lineaire : pour $\lambda \in K$, $\varphi, \varphi' \in \mathrm{Hom}(V, W)$, on a

$$(\lambda\varphi + \varphi')^* = \lambda.\varphi^* + \varphi'^*$$

2. Soit $\psi : W \mapsto Z$ une autre application lineaire vers un espace vectoriel Z. On a alors la composee $\psi \circ \varphi : V \mapsto Z$ et l'application duale $(\psi \circ \varphi)^* : Z^* \mapsto V^*$. Montrer que

$$(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*.$$

3. On a vu que le bi-dual V^{**} est identifie a V via l'isomorphisme

$$\mathrm{eval}_\bullet : v \in V \mapsto \mathrm{eval}_v = (\ell \mapsto \ell(v)) \in V^{**}.$$

   Montrer que sous cette identification la duale de la duale qu'une application φ est egale l'application elle-meme :

$$(\varphi^*)^* = \varphi.$$

Exercice 6 (Forme lineaire trace)**.** Soit V un K-ev de dimension finie $d \geqslant 1$, $V^* = \mathrm{Hom}(V, K)$ son dual et $\mathrm{End}(V) = \mathrm{Hom}(V, V)$ l'espace des endomorphismes de V.

Soit $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_d\}$ une base de V et $\mathcal{B}^* = \{\mathbf{e}_1^*, \cdots, \mathbf{e}_d^*\}$ la base duale. On forme alors la base des applications lineaires elementaires (prenant $\mathcal{B}' = \mathcal{B}$)

$$\mathcal{B}_{\mathcal{B},\mathcal{B}} := \{\mathcal{E}_{i,j} = \mathbf{e}_j^*.\mathbf{e}_i,\ i, j \leqslant d\}$$

de sorte que tout $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ se decompose de maniere unique

$$\varphi = \sum_{i,j \leqslant d}\sum m_{ij}(\varphi)\mathcal{E}_{i,j}.$$

On rappelle que les $m_{ij}(\varphi)$ sont les valeurs de formes lineaires en φ

$$\mathcal{E}_{i,j}^* : \varphi \mapsto m_{ij}(\varphi) = \mathbf{e}_i^*(\varphi(\mathbf{e}_j)) \in K.$$

On definit la trace de φ (relative a la base $\mathcal{B}$) en posant

$$\mathrm{tr}_{\mathcal{B}}(\varphi) := \sum_{i=1}^{d} m_{ii}(\varphi) = \sum_{i=1}^{d} \mathbf{e}_i^*(\varphi(\mathbf{e}_i)) \in K.$$

l'application $\mathrm{tr}_{\mathcal{B}}$ est une somme de formes lineaires sur $\mathrm{End}(V)$ et c'est donc une forme lineaire.

On va montrer que cette forme lineaire trace, $\mathrm{tr}_{\mathcal{B}}$, est independente du choix de la base $\mathcal{B}$. On pourra alors la noter

$$\mathrm{tr} : \varphi \in \mathrm{End}(V) \to \mathrm{tr}(\varphi) \in K.$$

Pour cela on introduit la famille des endomorphismes de rang 1 exactement

$$\mathrm{End}(V)_1 = \{\varphi_1 \in \mathrm{End}(V),\ \mathrm{rg}(\varphi) = \dim \mathrm{Im}(\varphi_1) = 1\} \subset \mathrm{End}(V).$$

1. Montrer que $\mathrm{End}(V)_1$ n'est pas un SEV mais qu'en fait que $\mathrm{End}(V)_1$ est une famille generatrice de $\mathrm{End}(V)$: tout element $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ est somme (finie) endomorphismes de rang 1.
2. Soit $\varphi_1 \in \mathrm{End}(V)_1$ un endomorphisme de rang 1. Montrer qu'il existe un vecteur non-nul $\mathbf{f} \in V - \{0_V\}$ et une forme lineaire non-nulle $\ell \in V^* - \{0_{V^*}\}$ tels que

$$\varphi_1 = \ell.\mathbf{f} \quad i.e.\ \forall v \in V,\ \varphi_1(v) = \ell(v).\mathbf{f}.$$

3. Montrer que la paire $(\ell, \mathbf{f})$ associee a φ est unique au sens suivant : si $\varphi = \ell'.\mathbf{f}'$ alors $\mathbf{f}'$ est proportionnel a $\mathbf{f}$ et ℓ' est inversement proportionnel a ℓ.
4. En deduire que l'association de l'ensemble des endomorphismes de rang 1 vers K donnee par

$$\mathrm{tr} : \varphi_1 = \ell.\mathbf{f} \in \mathrm{End}(V)_1 \mapsto \ell(\mathbf{f})$$

   est independente de la maniere d'ecrire $\varphi_1 = \ell.\mathbf{f}$ et defini une application "trace"

$$\mathrm{tr} : \ell.\mathbf{f} \in \mathrm{End}(V)_1 \to \ell(\mathbf{f}) \in K.$$

5. Montrer qu'il existe *au plus* une forme lineaire sur $\mathrm{End}(V)$ qui prend la valeur $\mathrm{tr}(\varphi_1)$ pour tout φ_1 de rang 1.
6. Montrer que pour tout φ_1 de rang 1

$$\mathrm{tr}(\varphi_1) = \mathrm{tr}_{\mathcal{B}}(\varphi_1).$$

   Pour cela on ecrira $\varphi_1 = \ell.\mathbf{f}$ et on decomposera $\mathbf{f}$ dans la base $\mathcal{B}$ et ℓ dans la base $\mathcal{B}^*$ et on calculera $\mathrm{tr}(\varphi_1) = \ell(\mathbf{f})$ en fonction de ces decompositions.
7. Montrer que si $\mathcal{B}'$ est une autre base de V alors pour tout $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ on a

$$\mathrm{tr}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \mathrm{tr}_{\mathcal{B}'}(\varphi).$$